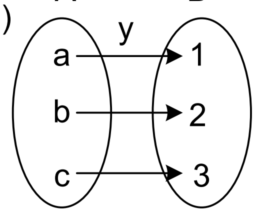
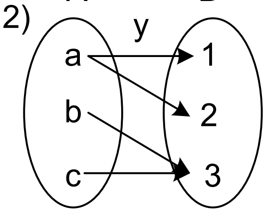
ضابطه تابع یا قانونی است که هر عضو از مجموعه A را به عضو منحصر بفردی از مجموعه B نظیر میکند.

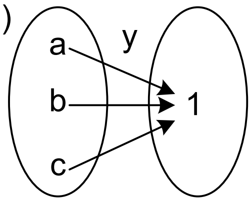
1) A تابع است B



2) A تابع نیست B



3) A تابع است B



$$\boxed{f:A \longrightarrow B \implies y=f(x)}$$

A مجموعه آغازین تابع f

B مجموعه پایانی تابع f

1) $f=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$

3) $f=\{(a,1),(b,1),(c,1)\}$

2) $f=\{(a,1),(a,2),(c,3)\}$

$$\boxed{f:A \longrightarrow B \implies \text{دامنه } f \quad D_f=\{x|x\in A\ ,y=f(x)\}}$$

$f(x)=\dfrac{1}{x-1} \implies D_f=R-\{1\}$

$f:R \longrightarrow R$

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+3} \implies x^2-4x+3 \geqslant 0 \implies (x-3)(x-1)=0$

x		1		3	
	+	0	-	0	+

$D_f=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

$f:R \longrightarrow R$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x^3-x}} \implies \dfrac{x+2}{x^3-x} \geqslant 0 \implies x^3-x=0$

$x(x-1)(x+1)=0$

$x+2=0$

x		-2		-1		0		1	
x+2	-	0	+		+		+		+
x	-		-		-	0	+		+
x-1	-		-		-		-	0	+
x+1	-		-	0	+		+		+
x	+		-		+		-		+
				تعریف نشده		تعریف نشده		تعریف نشده	

$D_f=(-\infty,-2]\cup(-1,0)\cup(1,+\infty)$

$f:R \longrightarrow R$ $\qquad -x^2+2x-1 \geqslant 0 \qquad x^2-2x+1 \leqslant 0$

$f(x)=\sqrt{-x^2+2x-1} \implies -x^2+2x-1=0 \implies x^2-2x+1=0 \implies (x-1)^2=0$

x		1	
	-	0	-

$D_f=R-\{1\}$

برای بدست آوردن برد تابع f در صورت امکان x را بر حسب y بدست مآوریم در این صورت رابطه ای برای y بدست می آوریم که دامنه این رابطه برد تابع f میباشد.

$$\boxed{f:A \longrightarrow B \implies \text{برد } f \quad R_f=\{y|y\in B\ ,x=f(y)\}}$$

$f(x)=y=\dfrac{2x}{1-x} \implies x=\dfrac{y}{2+y} \implies 2+y=0 \implies y=-2$

$R_f=R-\{-2\}$

در حقیقت هیچ x وجود ندارد که y آن مساوی -2 بشود

$f,g:A\longrightarrow B \xRightarrow{f(x)=g(x)}$ 1) $D_f=D_g$
2) $x\in D_f: f(x)=g(x)$

$f(x)=1 \Longrightarrow D_f=R$
$g(x)=\frac{x^2+1}{x^2+1} \Longrightarrow D_g=R$ — x^2+1 همیشه مثبت است و نامساوی صفر

$f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1} \Longrightarrow x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow D_f=R-\{1,-1\}$
$g(x)=1 \Longrightarrow D_g=R$

$f,g:A\longrightarrow B$ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$f,g:A\longrightarrow B$ $(f.g)(x)=f(x).g(x)$
$f,g:A\longrightarrow B$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$f,g:A\longrightarrow B$ $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$

$D_{(f+g)}=D_f\cap D_g$	$D_{(f+g)}=D_f\cap D_g$
$D_{(f-g)}=D_f\cap D_g$	$D_{(f/g)}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}$

$f(x)=\frac{2x}{x-1}$ $\quad (f+g)(x)=\frac{2x}{x-1}+\frac{x+2}{x-3}$ $\quad (f.g)(x)=\frac{2x}{x-1}\times\frac{x+2}{x-3}$

$g(x)=\frac{x+2}{x-3}$ $\quad (f-g)(x)=\frac{2x}{x-1}-\frac{x+2}{x-3}$ $\quad (f/g)(x)=\frac{2x(x-3)}{(x-1)(x+2)}$

$D_f=R-\{1\}$
$D_g=R-\{3\}$

$D_f\cap D_g=R-\{1,3\}$

$D_{(f+g)}=D_{(f-g)}=D_{(f-g)}=R-\{1,3\}$

$\frac{x+2}{x-3}=0 \Rightarrow x=-2$ $\qquad D_{(f/g)}=R-\{1,3,-2\}$

$f:A\longrightarrow B$, $g:B\longrightarrow C \Rightarrow gof(x)=g(f(x))$
$D_{(gof)}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}$
ترکیب دو تابع

$f:A\longrightarrow B$, $g:B\longrightarrow C \Rightarrow fog(x)=f(g(x))$
$D_{(fog)}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}$

$f(x)=\sqrt{x}$
$g(x)=5x-3$

$fog(x)=\sqrt{x}=f(g(x))=\sqrt{5x-3}$
$D_f=x\geqslant 0 \qquad D_g=R$
$D_{fog}=\{x|x\in R,\ g(x)\in D_f\} \Rightarrow 5x-3\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant\frac{3}{5}$
$D_{fog}=\{x|x\in R,\ x\geqslant\frac{3}{5}\}$

$gof(x)=5\sqrt{x}-3 \longrightarrow$
$D_f=x\geqslant 0 \qquad D_g=R$
$D_{gof}=\{x|x\geqslant 0\ ,\ x\geqslant 0\} \Rightarrow \xrightarrow{x\geqslant 0}$

اگر n یک عدد طبیعی باشد $f^n=fofof\ldots.of \Rightarrow f^1=f \Rightarrow f^2=fof$

$f(x)=\frac{1}{1+x}$
$f^3(2)=?$
$\Rightarrow f^3(2)=(fofof)(2) \Rightarrow fo(fof)(2) \Rightarrow (fofof)(2)=f(\frac{3}{4})=\frac{4}{7}$
$(fof)(2)=f(f(2)) \Rightarrow f(\frac{1}{3})=\frac{3}{4}$

$f:A\longrightarrow B$ 1) $x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f$ 2) $f(-x)=f(x)$ تابع زوج	$f:A\longrightarrow B$ 1) $x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f$ 2) $f(-x)=-f(x)$ تابع فرد

$f(x)=x^2+5 \Rightarrow D_f=R$
$f(-x)=(-x)^2+5=x^2+5 \Rightarrow f(-x)=f(x)$ تابع زوج

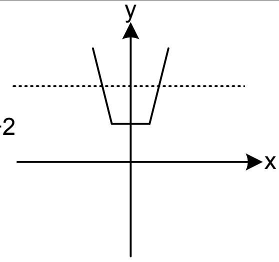
$f(x)=x^5+x^3+x \Rightarrow D_f=R$
$f(-x)=(-x)^5+(-x)^3+(-x)=-x^5-x^3-x=-(x^5+x^3+x)=-f(x)$ تابع فرد

$f(x)=x^2+x+5 \Rightarrow D_f=R$
$f(-x)=(-x)^2+(-x)+5=x^2-x+5 \Rightarrow f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$ تابع فرد یا زوج نیست

فقط تابع $f(x)=0$ میتواند هم زوج و هم فرد باشد

اگر تابعی زوج باشد نمودارش نسبت به محور y ها تقارن دارد و اگر تابع فرد باشد نمودارش نسبت به مبداء مختصات تقارن دارد.

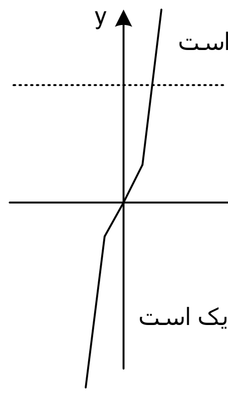
$f(x)=x^2+2$
(0,2)
(-1,3)
(1,3)
(-2,6)
(2,6)



تابع یک به یک نیست
تابع زوج است

تابع فرد است

$f(x)=x^3+x$
(0,0)
(1,2)
(-1,-2)
(2,10)
(-2,-10)



تابع یک به یک است

$f:R\longrightarrow R$
if $x1,x2\in D_f$
$f(x1)=f(x2) \Longrightarrow x1=x2$ تابع یک به یک
هر خط موازی محور x هانمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

$f(x)=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x1)=f(x2) \Rightarrow \frac{x1-1}{x1+1}=\frac{x2-1}{x2+1} \Longrightarrow x1=x2$ تابع یک به یک

$f(x)=-3x^2+5 \Rightarrow f(x1)=f(x2) \Rightarrow x1^2=x2^2 \Rightarrow x1\neq x2$ یک به یک نیست

$f:\bar{R}\longrightarrow R \Rightarrow f(x1)=f(x2) \Rightarrow x1^2=x2^2 \Rightarrow x1=x2$ تابع یک به یک است
$f(x)=-3x^2+5$

$f:A\longrightarrow B$
$R_f=B$
تابع پوشا

$f:R^{-\{1\}}\longrightarrow R$
$f(x)=\frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow y=\frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow x=\frac{y+4}{y-2} \Rightarrow R_f=R-\{2\} \Rightarrow R_f\neq B$ تابع پوشا نیست

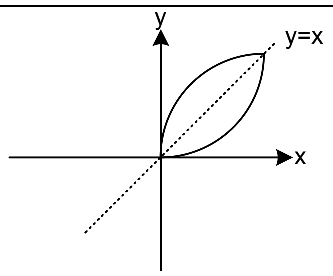
$f:R\longrightarrow\{1\}$
$f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+5} \Rightarrow y=1 \Rightarrow R_f=\{1\} \Rightarrow R_f=B$ تابع پوشا است

$f,g:A\longrightarrow B$ اگر تابع f معکوس پذیر باشد معکوس آن یکتاست $D_{f^{-1}}=R_f$ | $R_{f^{-1}}=D_f$
$fog(x)=x \quad gof(x)=x \quad g=f^{-1}$

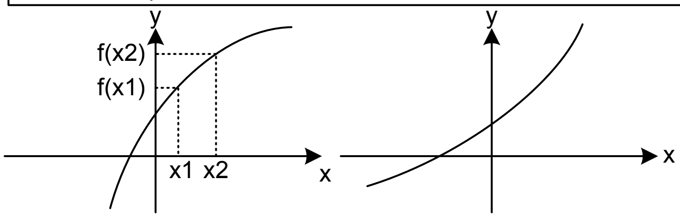
$$f(x)=\frac{-7x+6}{2} \Longrightarrow y=\frac{-7x+6}{2} \Longrightarrow x=\frac{2y-6}{-7} \Longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x-6}{-7}$$

$$f(x)=\frac{x-1}{x+2} \Longrightarrow x=\frac{-2y-1}{y-1} \Longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{-2x-1}{x-1}$$

اگر تابع f یک به یک باشد آنگاه تابع f معکوس پذیر است و برای رسم نمودار تابع معکوس از نیمساز ربع اول و سوم استفاده میکنیم.



$f:A\longrightarrow B,\ x1,x2\in D_f \Longrightarrow x1\leqslant x2 \Longrightarrow f(x1)\leqslant f(x2)$ تابع صعودی



$f(x)=x^3+x+5 \Longrightarrow x1\leqslant x2 \Longrightarrow x1^3\leqslant x2^3 \Longrightarrow x1^3+x1\leqslant x2^3+x2 \Longrightarrow$

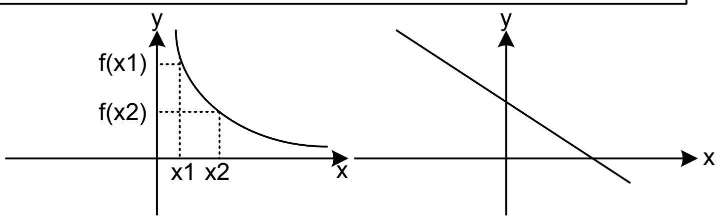
$x1^3+x1+5\leqslant x2^3+x2+5$ تابع صعودی

$f(x)=x^2+x+5 \Longrightarrow x1\leqslant x2 \Longrightarrow x1^2\nleqslant x2^2$ تابع صعودی نیست

$f:A\longrightarrow B,\ x1,x2\in D_f \Longrightarrow x1<x2 \Longrightarrow f(x1)<f(x2)$ تابع اکیدا صعودی

$f(x)=-5 \Longrightarrow \begin{cases} f(x1)=-5 \\ f(x2)=-5 \end{cases} \Longrightarrow$ $f(x1)\leqslant f(x2)$ تابع صعودی است ؛ $f(x1)\nless f(x2)$ تابع اکیدا صعودی نیست

$f:A\longrightarrow B,\ x1,x2\in D_f \Longrightarrow x1\leqslant x2 \Longrightarrow f(x1)\geqslant f(x2)$ تابع نزولی



$f:A\longrightarrow B,\ x1,x2\in D_f \Longrightarrow x1<x2 \Longrightarrow f(x1)>f(x2)$ تابع اکیدا نزولی

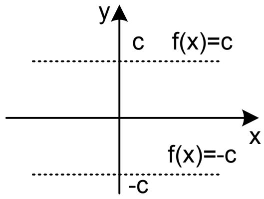
$f:R^+\longrightarrow R,\ f(x)=-x^2+3 \Longrightarrow x1<x2 \Longrightarrow x1^2<x2^2 \Longrightarrow -x1^2>-x2^2 \Longrightarrow -x1^2+3>-x2^2+3$

تابع اکیدا نزولی

$f:R\longrightarrow R,\ f(x)=x^2+3 \Longrightarrow$
- $-1<0 \Longrightarrow \overset{4}{f(-1)}>\overset{3}{f(0)}$ تابع صعودی نیست
- $1<2 \Longrightarrow \overset{4}{f(1)}<\overset{7}{f(2)}$ تابع نزولی نیست

برای نقض کردن میشود عدد گذاری کرد

$f(x)=c,\ D_f=R,\ R_f=\{c\}$ تابع ثابت



If $n\in N$ and $(a0.a1,a2,\ldots,an)\in R$
$f(x)=anx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots a1x+a1 \Longrightarrow D_f=R$

$|x|=\begin{cases} X\geqslant 0 \Longrightarrow x \\ X<0 \Longrightarrow x \end{cases}$

$|x|\geqslant 0 \qquad x\leqslant|x| \qquad |x+y|=|x|+|y|$

$|x|\leqslant a \overset{a\in R^+}{\Longleftrightarrow} -a\leqslant x\leqslant a$

$|x|\geqslant a \overset{a\in R^+}{\Longleftrightarrow} x\geqslant a$ or $x\leqslant -a$

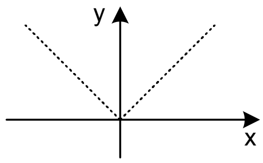
$|x.y|=|x||y|$

$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|} \quad y\neq 0$

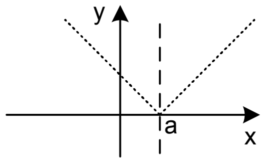
$\sqrt{x^2}=|x|$

$|-x|=|x|$

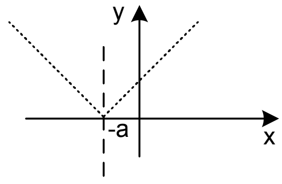
$y=|x-a|$, $a=0 \Longrightarrow y=|x|$



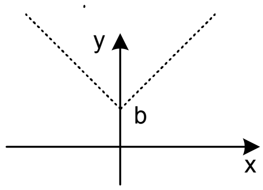
$y=|x-a|$, $a>0$



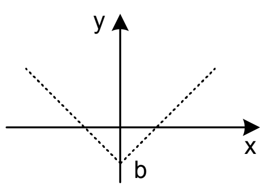
$y=|x+a|$, $a\geqslant 0$



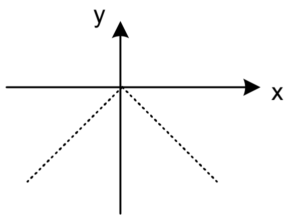
$y=|x|+b$, $b\geqslant 0$



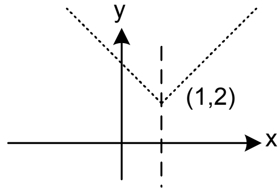
$y=|x|-b$, $b\geqslant 0$



$y=-|x|$

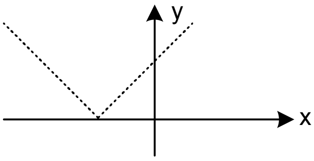


y=|x-1|+2

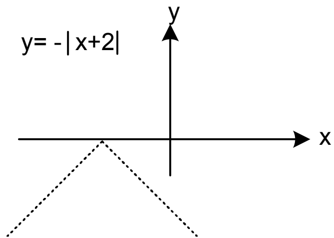


y= - |x+2|+1

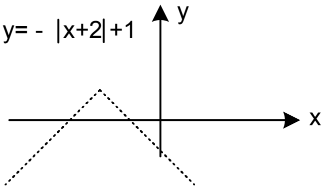
y= |x+2|



y= -|x+2|



y= - |x+2|+1



$f(x)=|x|$
$D_f=R$
$R_f=\{x|x\geqslant 0\}$
تابع قدر مطلق

$[x]\leqslant x<[x]+1$

$0\leqslant x-[x]<1$

$[x]=n$ if $n\in Z$ $\quad n\leqslant x<x+1$

$[x+n]=[x]+n$ if $n\in Z$

$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & \text{if } n\in Z\\ -1 & \text{if } n\notin Z\end{cases}$

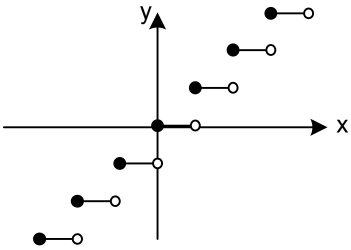
$[x+y]=\begin{cases}[x]+[y]\\ \text{or}\\ [x]+[y]+1\end{cases}$ $\quad [1.5+2.25]=[3.75]=[1.5]+[2.25]=3$, $[1.5-0.5]=[1]=1$, $[1.5]+[-0.5]=0$

$f(x)=[x]$
$D_f=R$
$R_f=Z$
تابع جزء صحیح

$-1<=x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow f(x)=-1$

$0<=x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow f(x)=0$

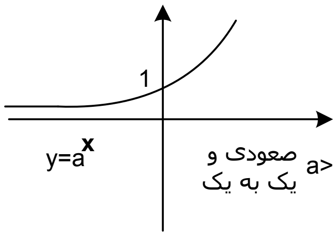
$1<=x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow f(x)=1$



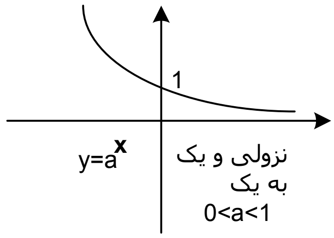
$f(x)=\dfrac{3x^2-1}{[x+3]-1} \xRightarrow{D_f=?} [x+3]-1=0 \Rightarrow [x]=-2 \Rightarrow -2\leqslant x<-1$

$D_f=R-[-2,-1)$ or $(-\infty,-2)U[-1,+\infty)$

$a>0$, $a\neq 1$
$f(x)=a^x$
$D_f=R$ $\quad R_f=(0,+\infty)=R^+$
تابع نما یی

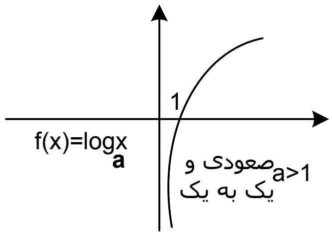


$y=a^x$ صعودی و یک به یک $a>1$

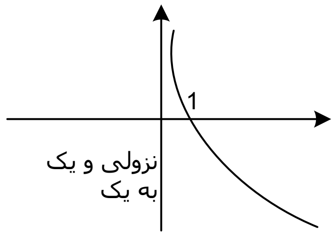


$y=a^x$ نزولی و یک به یک $0<a<1$

$f(x)=a^x$ $\quad D_{f^{-1}}=R_f=(0,+\infty)=R^+$
$f^{-1}(x)=\log_a x$ $\quad R_{f^{-1}}=D_f=R$
تابع لگاریتمی



$f(x)=\log_a x$ صعودی و یک به یک $a>1$



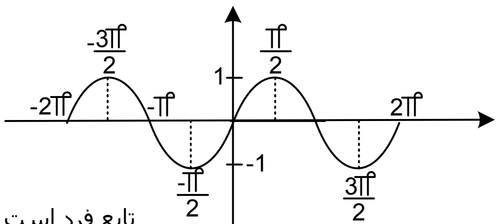
نزولی و یک به یک

$f(x)=\log_{x-1}(4-x^2) \Longrightarrow \begin{cases}4-x^2>0\\ x-1>0\\ x-1\neq 1\end{cases}$ خصوصیت لگاریتم $\Longrightarrow \begin{cases}4-x^2=0 & x=2 \quad x=-2\\ x-1=0 & x=1\\ x\neq 2 & x\neq 2\end{cases}$

	-2		1		2	
$4-x^2$	- 0	+		+	0	-
$x-1$	-	-	0	+		+

$D_f=(1,2)$

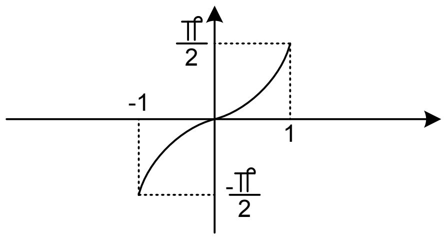
$f(x)=\sin x$
$D_f=R$
$R_f=[-1,1]$



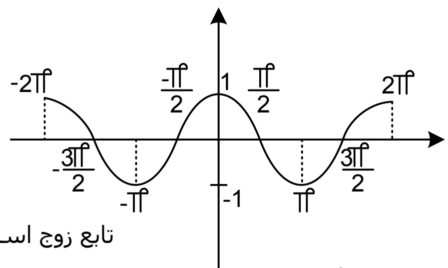
$\text{Sin}(-x)=-\sin x$ تابع فرد است

$y=\sin x \Longrightarrow \text{Sin}[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ تابع معکوس پذیر است(یک به یک)

$f^{-1}(x)=\arcsin x=\sin^{-1}x$
$D_{f^{-1}}=[-1,1]$
$R_{f^{-1}}=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$



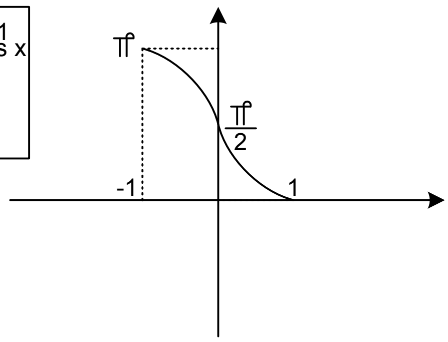
$f(x)=\cos x$
$D_f=R$
$R_f=[-1,1]$



$\cos(-x)=\cos x$ تابع زوج است

$y=\cos x \Longrightarrow \cos[0, \pi]$ تابع معکوس پذیر است(یک به یک)

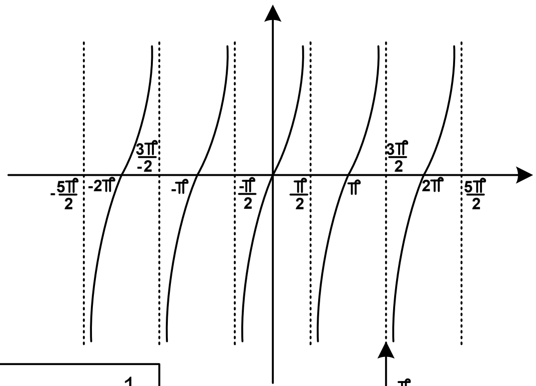
$f^{-1}(x)=\text{arc}\cos x=\cos^{-1}x$
$D_{f^{-1}}=[-1,1]$
$R_{f^{-1}}=[0,\pi]$



$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$\cos x=0 \Longrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$ $\qquad R_f=R$

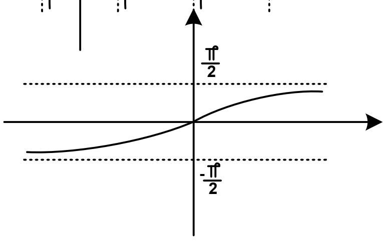
$D_f=R-\{k\pi+\frac{\pi}{2} \mid k\in Z\}$



$f^{-1}(x)=\text{arc}\tan x=\tan^{-1}x$

$D_{f^{-1}}=R$

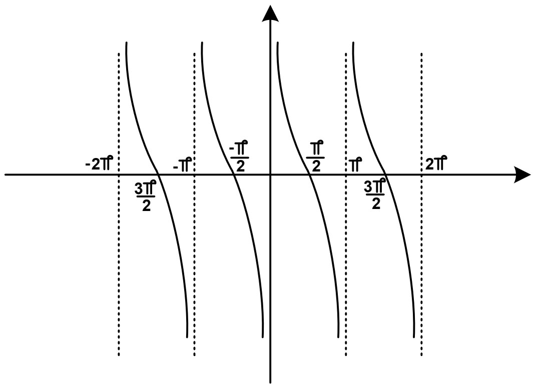
$R_{f^{-1}}=(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



$f(x)=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$

$\cos x=0 \Longrightarrow x=k\pi, k\in Z$ $\qquad R_f=R$

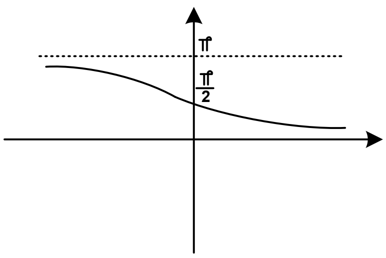
$D_f=R-\{k\pi \mid k\in Z\}$



$f^{-1}(x)=\text{arc}\cot x=\cot^{-1}x$

$D_{f^{-1}}=R$

$R_{f^{-1}}=(\mathbf{0}, \pi)$



$f(x)=\text{arc}\cos(2x+1)-2$

$-1\leqslant 2x+1\leqslant 1 \Longrightarrow -1\leqslant x\leqslant 0 \Longrightarrow D_f=[-1,0]$

$0\leqslant \text{arc}(2x+1)\leqslant \pi \Longrightarrow -2\leqslant \text{arc}(2x+1)-2\leqslant \pi-2$

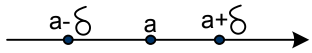
$-2\leqslant f(x)\leqslant \pi-2 \Longrightarrow R_f=[-2,\pi-2]$

$\frac{2x^2-x-1}{x-1}$	x	0	0.25	0.5	0.75	0.90	0.99	0.999	$x\longrightarrow 1$
	f(x)	1	1.5	2	2.5	2.8	2.98	2.998	$f(x)\longrightarrow 3$

$0 \longrightarrow 1 \quad 2$

$\frac{2x^2-x-1}{x-1}$	x	2	1.75	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	$x\longrightarrow 1$
	f(x)	5	4.5	4	3.5	3.2	3.02	3.002	$f(x)\longrightarrow 3$

$0 \quad 1 \longleftarrow 2$



$\forall \delta \in R>0$

همسایگی نقطه a $=(a-\delta, a+\delta)$

$\lim_{x\to a} f(x)=l \Longrightarrow \forall \epsilon$ and $\delta\in R>0 \Longrightarrow 0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-l|<\epsilon$

$\lim_{x\to a} f(x)=l1$ $\qquad \lim_{x\to a} g(x)=l2$

$\lim_{x\to a} (f+g)x=l1+l2$

$\lim_{x\to a} (f-g)x=l1-l2$

$\lim_{x\to a} (f.g)x=l1.l2$

$\lim_{x\to a} (f/g)x=l1/l2 \Longrightarrow l2<>0$

$\lim_{x\to a} Kf(x)=Kl1 \Longrightarrow K\in R$

$\lim_{x\to a} f^n(x)=l1^n \Longrightarrow n\in N$

$\lim \sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l1}$ اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد حد فوق زمانی وجود دارد که $l1>=0$

$\lim_{x\to a} c=c$

$\lim_{x\to a} anx^n+a(n-1)x^{n-1}+\ldots a1x+a0=anx^n+a(n-1)x^{n-1}+\ldots a1x+a0$

$\lim_{x\to a} \sin x=\sin a$

$\lim_{x\to a} \cos x=\cos a$

$\lim_{x\to a} \tan x=\tan a$ $\qquad a\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ and $k\in Z$

$\lim_{x\to a} \cot x=\cot a$ $\qquad a\neq k\pi$ and $k\in Z$

$\lim_{x\to b} a^x=a^b$

$\lim_{x\to b} \log_a x=\log_a b$ $\qquad b>0$

$\lim_{x\to a} \sin^{-1}x=\sin^{-1}a$ $\qquad a\in[-1,1]$ $\qquad \lim_{x\to a} \tan^{-1}x=\tan^{-1}a$

$\lim_{x\to a} \cos^{-1}x=\cos^{-1}a$ $\qquad a\in[-1,1]$ $\qquad \lim_{x\to a} \cot^{-1}x=\cot^{-1}a$

$$\lim_{x\to -2}(x^3-4x+5)=-8+8+5=5$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin x+x^2+4x+7)=0+0+0+7=7$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+6}{x+10}=\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to -1}(x^2+4x-7)(x^3-4x)=-10*3=-30$$

$$\lim_{x\to 0}(x^2+4x+3)^3=3^3=27$$

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{(4x^2+2x+7)}=\sqrt{13}$$

$\lim_{x\to 0}\sqrt{-1+4x^2}$ حد وجود ندارد

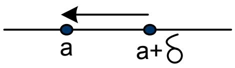
$$\lim_{x\to 5}2=5$$

حد راست تابع

$\forall\ x\in(a,a+t)\Longrightarrow f(x)$ تعریف شده

$\forall \epsilon>0,\delta>0 : a<x<a+\delta \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\epsilon$

$\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell$

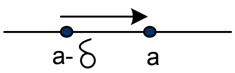


حد چپ تابع

$\forall\ x\in(a-t,a)\Longrightarrow f(x)$ تعریف شده

$\forall \epsilon>0,\delta>0 : a-\delta<x<a \Longrightarrow |f(x)-\ell|<\epsilon$

$\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell$



> تابع f در نقطه x=a دارای حد ℓ است اگر و تنها اگر حد راست و چپ آن در نقطه x=a مساوی و برابر با ℓ باشد.

$\lim_{x\to 0} f(x)=[x]$ $\quad \lim_{x\to 0^+}[x]=0$ $\quad \lim_{x\to 0^-}[x]=-1$

تابع در نقطه a=0 حد ندارد

$\lim_{x\to -2} f(x)=[-x]+x$

$\lim_{x\to -2^+} f(x)=[-x]+x$: $-2<x<-1$, $1<-x<2$, $=1+(-2)=-1$

$\lim_{x\to -2^-} f(x)=[-x]+x$: $-3<x<-2$, $2<-x<3$, $=2+(-2)=0$

تابع در نقطه a=-2 حد ندارد

> $f(x)=$ کران دار
> $\lim_{x\to 0} g(x)=0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)g(x)=0$ کران داری

$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ $\qquad \sin\frac{1}{x}$ کران دار

نمودار تابع کراندار بین دو خط افقی قرار میگیرد مثل تابع sinx

> $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$
> $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\ell \Longrightarrow \lim_{x\to a} g(x)=\ell$ قضیه فشردگی

$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$

$[x]\leqslant x<[x]+1$

$\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1 \qquad x<>0$

$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}$

$x\left(\frac{1}{x}-1\right)<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant x\frac{1}{x} \qquad x>0$

$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$

$x\to 0^+$: $1 \qquad 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

$x\left(\frac{1}{x}-1\right)>x\left[\frac{1}{x}\right]\geqslant x\frac{1}{x} \qquad x<0$

or

$x\frac{1}{x}\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]<x\left(\frac{1}{x}-1\right)$

$1\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$

$x\to 0^-$: $1 \qquad 1 \qquad \lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

> $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \Longrightarrow f\sim g$ هم ارزی

> $f(x)=\sin x,\ g(x)=x \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\sin x=0,\ \lim_{x\to 0}x=0 \Longrightarrow \lim\frac{\sin x}{x}=1$
> $\sin x\sim x$

هم ارزی مهم درکمان x=0
$x\to 0$

$\sin x\sim x$

$\sin^m(nx)\sim(nx)^m$

$\tan^m(nx)\sim(nx)^m$

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

$\sin^{-1}x\sim x-\frac{x^2}{6}$

$\tan^{-1}x\sim x-\frac{x^3}{6}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{8x}=\frac{7}{8}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x^2}=\lim\frac{\frac{x^2}{2}}{5x^2}=\frac{1}{10}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{2x^2}=\lim\frac{\frac{(3x)^2}{2}}{2x^2}=\frac{9}{4}$$

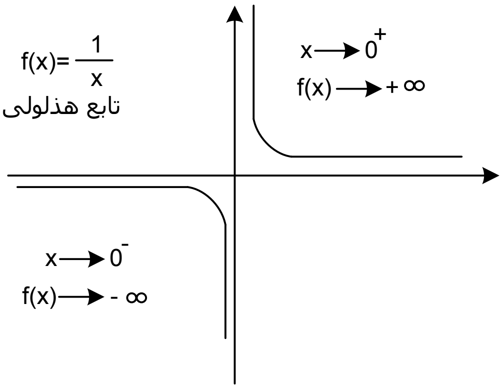
$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x \Longrightarrow \lim_{u\to 0}u\tan\frac{\pi}{2}(1-u)=\lim_{u\to 0}u\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}u\right)$$

$u=1-x\Longrightarrow x=1-u,\ u\to 0$

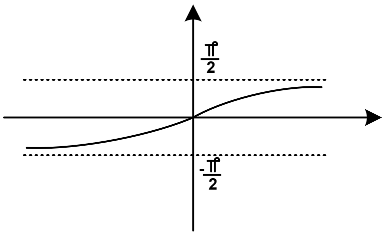
$$\lim_{u\to 0}u\cot\frac{\pi}{2}u=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\tan\frac{\pi}{2}u}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{\pi}{2}u}=\frac{2}{\pi}$$

$f(x)=\frac{1}{x}$

تابع هذلولی

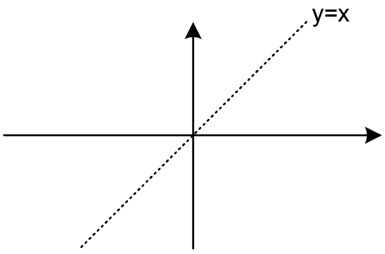


$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$



$\lim_{x\to+\infty} \tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}x=-\frac{\pi}{2}$



$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim_{x\to\infty} a_nx^n+a_{(n-1)}x^{n-1}+\dots a_1x+a_0=\infty$

$\lim_{x\to\infty} (1+x^2+x^4)=\infty$

$\lim_{x\to\infty} a_nx^n+a_{(n-1)}x^{n-1}+\dots a_1x+a_0=\lim_{x\to\infty} a_nx^n$

$\lim_{x\to-\infty} (x^3+4x+7)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

$\lim_{x\to a \text{ or } \infty} f(x)=\ell\neq0$	$\lim_{x\to a} g(x)=0$	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ حد عدد بر روی صفر مساوی بینهایت است

$\lim_{x\to1} \frac{x^2-2x}{x-1}=\infty$

$\lim_{x\to-1} \frac{x^2+2x}{X+1}=-\infty$

$x\to-1^+ \Rightarrow x>-1 \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow \frac{-}{+}=-$

$\lim_{x\to a \text{ or } \infty} f(x)=\ell\neq\infty$	$\lim_{x\to a} g(x)=\infty$	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=0$ حد عدد بر روی بینهایت مساوی صفر است

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{X+8+7}=0$

$$\lim_{x\to a} \frac{a_nx^n+a_{(n-1)}x^{n-1}+\dots a_1x+a_0}{a_mx^m+a_{(m-1)}x^{m-1}+\dots a_1x+a_0}=\begin{cases}\infty & n>m\\ \frac{a_n}{b_m} & n=m\\ 0 & n<m\end{cases}$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x^2+6+7}{x+2x^2-9}=\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{11}+x^{10}-9x^4+6}{2x+x^{19}+9x^4}=0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1+7x+9x^2}{6x+3x^2+9}=\frac{9}{3}=3$

هم ارزیها در بینهایت

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots+c}\sim\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right| \quad \begin{cases} x\to+\infty: & \sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)\\ x\to-\infty: & -\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)\end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+3x-4}-x+5)=\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1}(x+\frac{3}{2*1})-x+5)=\lim_{x\to+\infty} (x+\frac{3}{2}-x+5)=\frac{13}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt[3]{8x^3+x-9})}{\sqrt[4]{x^4+1}}=\lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt[3]{8}(x+\frac{0}{3*8})}{-\sqrt[3]{1}(x+\frac{0}{4*1})}=\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{-x}=2$

اگر در محاسبه حدود به یکی از حالتهای زیر برخورد کنیم آن حالت را مبهم میگویند ،که باید آنها را رفع ابهام کنیم.

$(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, -\infty+\infty, 0*\infty, 0^{\infty}, 1^{\infty}, \dots)$

در رفع ابهام باید به عدد یا بینهایت برسیم

$\boxed{\text{رفع ابهام } \frac{0}{0}}$:

ابتدا باید عامل صفر صورت و مخرج راز بین ببریم در غیر اینصورت از قضایای مرتبط با حدود استفاده میکنیم.

$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1} \frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}$

$\lim_{x\to0} \frac{\sin7x}{8x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0} \frac{7x}{8x}=\frac{7}{8}$

$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos3x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0} \frac{\frac{(3x)^2}{2}}{2x^2}=\lim_{x\to0} \frac{9x^2}{4x^2}=\frac{9}{4}$

$\boxed{\text{رفع ابهام } \frac{\infty}{\infty}}$:

ابتدا در صورت امکان آنرا به حالت $\frac{0}{0}$ در می آوریم در غیر اینصورت از قضایای مرتبط با حدود نامتناهی استفاده میکنیم.

$\lim_{x\to0} \frac{\cot4x}{\cot7x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim \frac{\frac{1}{\tan4x}}{\frac{1}{\tan7x}}=\lim \frac{\tan7x}{\tan4x}=\lim \frac{7x}{4x}=\lim=\frac{7}{4}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5x+\sqrt{4x^2-x+1}}{x+2+\sqrt{x+3}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5x+\sqrt{4}\,|x+\frac{-1}{2*4}|}{x+2+\sqrt{x+3}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5x+2(x-\frac{1}{8})}{x+2+\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+7x-\frac{1}{4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x}=\lim 3x=+\infty$$

رفع ابهام $\infty-\infty$:

ابتدا در صورت امکان آنرا ساده میکنیم در غیر اینصورت از قضایای مرتبط با حدود نامتناهی استفاده میکنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}(|x+\frac{3}{3*1}|-x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1-x)=1$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{\sin^2x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos^2\frac{x}{2}-1}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\right)=\lim_{x\to0}^{-}\left(\frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\right)=\lim$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\right)=\lim_{x\to0}-\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{-1}{4}$$

رفع ابهام $0*\infty$:

ابتدا در صورت امکان به حالتهای $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل میکنیم

$$\lim_{x\to1}(2x^2-x-1)\tan\frac{\pi}{2}x=0*\infty=\lim_{x\to1}(2x^2-x-1)\frac{1}{\cot\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x-1)}{\cot\frac{\pi}{2}x}$$

$u=x-1,x=u+1$, $x\to1,u\to0$

$$=\lim_{u\to0}\frac{[2(u+1)^2-(u+1)-1]}{\cot\frac{\pi}{2}(u+1)}=\lim_{u\to0}\frac{2u^2+4u+2-u-1-1}{\cot(\frac{\pi}{2}u+\frac{\pi}{2})}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{2u^2+3u}{-\tan\frac{\pi}{2}u}=\lim_{u\to0}\frac{u(2u+3)}{-\frac{\pi}{2}u}=\frac{3}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{6}{\pi}$$

پیوستگی یک تابع: گوئیم تابع f در نقطه a پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ مانند توابع جبری و سینوسی

پیوستگی راست تابع: گوئیم تابع f در نقطه a پیوستگی راست دارد هرگاه

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$$

پیوستگی چپ تابع: گوئیم تابع f در نقطه a پیوستگی چپ دارد هرگاه

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

تابع f در نقطه x=a پیوسته است اگر و تنها اگر پیوستگی راست و پیوستگی چپ داشته باشد

$f(x)=[x]$
$x=0$

$\lim_{u\to0^+}f(x)=\lim_{u\to0^+}[x]=0=f(0)=0$ پیوستگی راست دارد

$\lim_{u\to0^-}f(x)=\lim_{u\to0^-}[x]=-1\neq f(0)$ پیوستگی چپ ندارد

تابع f در نقطه x=0 پیوسته نیست.

$f(x)=[x]+[-x]+2$
$x=-2$

$f(-2)=[-2]+[2]+2=2$

$\lim_{x\to-2^+}[x]+[-x]+2 \Longrightarrow \begin{matrix}-2<x<-1\\2>-x>1\end{matrix} =-2+1+2=1\neq f(-2)$ پیوستگی راست ندارد

$\lim_{x\to-2^-}[x]+[-x]+2 \Longrightarrow \begin{matrix}-3<x<-2\\3>-x>2\end{matrix} =-3+2+2=1\neq f(-2)$ پیوستگی چپ ندارد

تابع f در نقطه x=-2 پیوسته نیست.

اگر تابع f,g در نقطه x=a پیوسته باشند آنگاه مجموع،تفاضل ،و ضرب دو تابع f,g در نقطه a پیوسته اند همچنین اگر g(a)<>0 باشد تابع f/g در نقطه a پیوسته است.

اگر تابع g در نقطه a پیوسته باشد و تابع f در نقطه g(a) پیوسته باشد در اینصورت ترکیب تابع fog در نقطه a پیوسته است.

$f(x)=\sin(5x^2+4x-7)$, $x=a$, $a\in R$ $\Longrightarrow$ $h(x)=\sin x$ پیوسته است، $g(x)=5x^2+4x-7$ پیوسته است ($x=a$)

$hog(x)=h(gx)=\sin(gx)=\sin(5x^2+4x-7)$ ($x=a$) پیوسته است

پیوستگی تابع در (a,b)

گوئیم تابع f در بازه (a,b) پیوسته است هرگاه به ازای هر $x\in(a,b)$ تابع f در نقطه x پیوسته باشد.

پیوستگی تابع در [a,b]

گوئیم تابع f در بازه [a,b] پیوسته است هرگاه :

1-در بازه (a,b) تابع f پیوسته باشد.
2-در نقطه x=a پیوستگی راست داشته باشد.
3-در نقطه x=b پیوستگی چپ داشته باشد.

پیوستگی تابع f را در بازه [0,3] بررسی کنید؟

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & x<=0\\ x-1 & 0<x<=3\\ [2x-1] & x>3\end{cases}\qquad f(t)=t-1$$

$t\in(0,3)\Longrightarrow \lim_{x\to t}f(x)=\lim_{x\to t}(x-1)=t-1=f(t)$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x-1)=-1=f(0)$ $\qquad f(0)=\sin0-1=-1$

تابع f در نقطه x=0 پیوستگی راست دارد

$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}(x-1)=2=f(3)$ $\qquad f(3)=3-1=2$

تابع f در نقطه x=3 پیوستگی چپ دارد

تابع f در بازه [0,3] پیوسته است.

مقدار a,b را طوری بدست آورید که تابع f در نقطه x=-2 پیوسته باشد؟

$$f(x)=\begin{cases}a+[x+2] & x>-2\\ x+[x] & x=-2\\ bx+2 & x<-2\end{cases}$$

$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}a+[x+2]$ $\quad -2<x<-1$ $\quad \lim_{x\to-2^+}(a+[x]+2)=a+2-2=a=f(-2)$

$f(-2)=x+[x]=-2+[-2]=-4 \Longrightarrow a=-4$

$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}bx+2=-2b+2 \Longrightarrow -2b+2=-4 \Longrightarrow b=3$

تعریف مشتق یک تابع در یک نقطه:

فرض کنیم که t یک عدد حقیقی مثبت باشد و تابع f در بازه (a-t , a+t) تعریف شده باشد.گوئیم تابع f در نقطه a مشتق پذیر است هرگاه طبق حد زیر موجود و متناهی باشد.در اینصورت مشتق تابع f در نقطه a را با f`(a) نمایش میدهند.

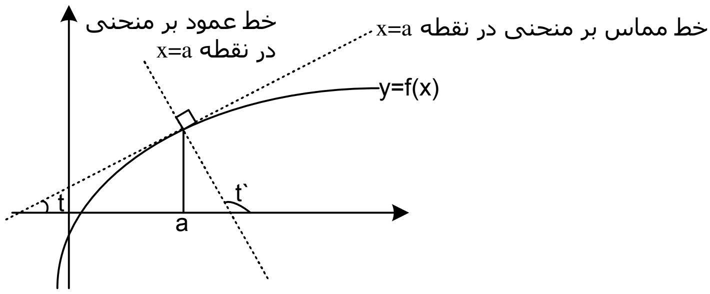
$$\boxed{f`(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

$$f(x)=x^3,\ x=-2 \Longrightarrow f`(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}x^2-2x+4=12$$

ضریب زاویه خط مماس برمنحنی y=f(x) در نقطه x=a برابر است با مشتق تابع f در نقطه a   f`(a)

ضریب زاویه خط قائم برمنحنی y=f(x) در نقطه x=a برابر است با عکس مشتق تابع f در نقطه a بشرط اینکه f`(a)<>0   $-\frac{1}{f`(a)}$



$m=f`(a)=\tan t$ ضریب زاویه خط مماس بر منحنی

$m`=-\frac{1}{f`(a)}=\tan t`$ ضریب زاویه خط عمود بر منحنی

$$y=f(x)=x^3,\ x=-2 \Longrightarrow m=f`(-2)=12,\ m`=\frac{-1}{12} \Longrightarrow y=f(x)=f(-2)=-2^3=-8$$

$y-y1=m(x-x1) \Longrightarrow$ $y+8=12(x+2)$ معادله خط مماس بر منحنی در نقطه x=a

$y+8=\frac{-1}{12}(x+2)$ معادله خط قائم بر منحنی در نقطه x=a

تعریف مشتق راست یک تابع در نقطه x=a:

مشتق راست تابع f در نقطه a را با f`+(a) نمایش میدهیم

$$\boxed{f`(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

مشتق چپ تابع f در نقطه a را با f`-(a) نمایش میدهیم

$$\boxed{f`(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

تابع f در نقطه a مشتق پذیر است اگر و تنها اگر مشتق چپ و راست آن موجود،متناهی و برابر باشد.

مشتق پذیری تابع در نقطه x=0 را بررسی کنید؟ $y=f(x)=|x|,\ x=0$

$$f`+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f`-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

تابع y=|x| در نقطه صفر مشتق پذیر نیست ولی پیوسته است.

اگر تابع f در نقطه a مشتق پذیر باشد آنگاه در نقطه a پیوسته است ولی عکس این مطلب همواره برقرار نیست.

اگر تابع f , g در نقطه a مشتق پذیر باشند در اینصورت:

1- مجموع آنها در نقطه a مشتق پذیر است و برابر است با مجموع مشتق ها

$$\boxed{(f+g)`a=f`(a)+g`(a)}$$

2- تفاضل آنها در نقطه a مشتق پذیر است:

$$\boxed{(f-g)`a=f`(a)-g`(a)}$$

3- حاصلضرب آنها در نقطه a مشتق پذیر است:

$$\boxed{(f.g)`a=f`(a)g(a)+g`(a)f(a)}$$

4- تقسیم آنها در نقطه a مشتق پذیر است بشرط آنکه g(a)<>0

$$\boxed{(f/g)`a=\frac{f`(a)g(a)-g`(a)f(a)}{[g(a)]^2}}$$

5- اگر k یک عدد حقیقی ثابت باشد آنگاه:

$$\boxed{(kf)`a=kf`(a)}$$

فرمولهای مشتق گیری

اگر c یک عدد ثابت باشد. $\Longrightarrow C`=0$

$$(x^n)`=nx^{n-1}$$

$$(\sin x)`=\cos x$$

$$(\cos x)`=-\sin x$$

$$(\tan x)`=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)`=-(1+\cot^2 x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(n^x)`=n^x\log_e a$$

$$(e^x)`=e^x$$

$$(\log_a x)`=\frac{1}{x\log_e a}$$

$$(\log_e x)`=\frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)`=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)`=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)`=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\text{arc}\cot x)`=\frac{-1}{1+x^2}$$

$$(\sqrt[n]{x^m})`=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

Bay

$(5)' = 0$

$(x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ or $(x^{\frac{1}{2}})' = 1\ x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sqrt[3]{x^2})' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$(x^3)' = 3x^2$

$(5x^2)' = 10x$

$(\frac{1}{x^6})' = (x^{-6})' = -6x^{-7}$

$(x^2+x-1)' = 2x+1$

$(5x^3+4x^2+8x+9)' = 15x^2+8x+8$

$[(x^2+x+7)\sin x]' = (2x+1)\sin x + \cos x(x^2+x+7)$

$$\left(\frac{1-\tan x}{1+\cot x}\right)' = \frac{(0-1-\tan^2 x)(1+\cot x)-(0-1-\cot^2 x)(1-\tan x)}{(1+\cot x)^2}$$
$$= \frac{-(1+\tan^2 x)(1+\cot x)+(1+\cot^2 x)(1-\tan x)}{(1+\cot x)^2}$$

مشتق توابع زنجیره ای(توابع مرکب)

فرض کنیم که تابع g در نقطعه a و تابع f در نقطعه g(a) مشتق پذیر باشد در اینصورت تابع مرکب fog در نقطعه a مشتق پذیر است و مشتق آن بصورت زیر بدست می آید.

$$\boxed{(fog)'a = f'[g(a)].g'(a)}$$

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$

$(\sin^n u)' = nu'(\sin u)^{n-1}\cos u$

$(\cos^n u)' = -nu'(\cos u)^{n-1}\sin u$

$(\tan^n u)' = nu'(\tan u)^{n-1}(1+\tan^2 u)$

$(\cot^n u)' = -nu'(\cot u)^{n-1}(1+\cot^2 u)$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$

$(e^u)' = u'e^u$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $\qquad (\sqrt[n]{u^m})' = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{m-n}}}$

$(\text{Arc sin } u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\text{Arc cos } u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\text{Arc tan } u)' = \frac{u'}{1+u^2}$ $\qquad (\text{Arc cot } u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$

$((x^3+2x+4)^5)' = 5(3x^2+2)(x^3+2x+4)^4$

$(\cos 4x)' = -4\sin 4x$

$(\cos 4x)' = -1*4\cos^0 4x \sin 4x = -4\sin 4x$

$(\cos^2 4x)' = -2*4\cos 4x \sin 4x$

$[\tan^2(3x^2+5x+7)]' = 2(6x+5)\tan(3x^2+5x+7)(1+\tan^2(3x+5x+7))$

$(\sqrt{x^4+2x^2+3})' = (u^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}}u' = \frac{1}{2}(x^4+2x^2+3)^{\frac{-1}{2}}(4x^3+4x)$

$[(3x-4x^3)]^{-7}{}' = -7(3x-4x^3)^{-8}(3-12x^2)$

$$(\sqrt{x^2+\sqrt{x+1}})' = \frac{2x+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x^2+\sqrt{x+1}}}$$

$$[\sin^2\sqrt[3]{(x^2+4x-1)^2}]' = 2\frac{2(2x+4)}{3\sqrt[3]{x^2+4x-1}}\sin\sqrt[3]{(x^2+4x-1)^2}\cos\sqrt[3]{(x^2+4x-1)^2}$$

$$(\ln \sin^5 x)' = \frac{5\sin^4 x\cos x}{\sin^5 x}$$

$$(\text{Arc cot}\sqrt{\sin x})' = \frac{\frac{-\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{1+(\sqrt{\sin x})^2}$$

تعریف دیفرانسیل یک تابع:

اگردر تابع y=f(x) تغییرات x را با $\triangle x$ و تغییرات y را با $\triangle y$ نمایش دهیم ،در صورتیکه تغییرات x خیلی کوچک باشد یا بعبارت دیگر میل کند $x \to 0$ را با dx نمایش میدهیم. $\triangle x = dx$

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} \Longrightarrow df = f'(x)dx}$$

$$\boxed{f'(x) = \lim_{x \to 0}\frac{dy}{dx}}$$

$f(x) = \cot(x^2+4x-7)+\sin^3 x+7\cos 5x$

$df = f'(x)dx = [(-(2x+4)(1+\cot^2(x^2+4x-7))+3\sin^2 x\cos -35\sin 5x]dx$

مشتق توابع پارامتری:

تابع y=f(x) را یک تابع پارامتری مینامیم هرگاه x,y تابعی از t باشد.

$$\begin{cases} y=f(t) \\ x=g(t) \end{cases} \qquad \boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \text{ مشتق y نسبت به x}}$$

$$\begin{cases} y=t^5+4t^3+2t-8 \\ x=\sin^2 t+\cos^3 t \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق y نسبت به x}} y' = \frac{5t^4+12t^2+2}{2\sin t\cos t-3\cos^2 t\sin t}$$

مشتقات جزعی تابع دو متغییره:

با فرض x,y دو متغییر مستقل و z تابعی از دو متغییر z=f(x,y) ،

∂=روند

Y را عدد ثابت فرض میکنیم $y=c$ $\quad z`(x)=\dfrac{\partial z}{\partial x}$ مشتق z نسبت به x

x را عدد ثابت فرض میکنیم $x=c$ $\quad z`(x)=\dfrac{\partial z}{\partial y}$ مشتق z نسبت به y

$$Z=f(x,y)=x^2+y^2-5 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=2x$$

$$Z=f(x,y)=x^2+y^2-5 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=2y$$

$$Z=f(x,y)=x^3+y^4+3x^2y-7xy^7+9 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6yx-7y^7$$

$$Z=f(x,y)=x^3+y^4+3x^2y-7xy^7+9 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=4y^3+3x^2-49xy^6$$

$$Z=f(x,y)=\sqrt{\sin^2(5x^2+4y+7)+x^2+y^2-7xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{u`}{2\sqrt{u}}=\frac{2\sin(5x^2+4y+7)\cos(5x^2+4y+7)(10x)+2x-7y}{2\sqrt{\sin^2(5x^2+4y+7)+x^2+y^2-7xy}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{u`}{2\sqrt{u}}=\frac{2\sin(5x^2+4y+7)\cos(5x^2+4y+7)(4)+2y-7x}{2\sqrt{\sin^2(5x^2+4y+7)+x^2+y^2-7xy}}$$

مشتق توابع ضمنی:

اگر x یک متغییر مستقل و y یک متغییر وابسته به x باشد هر معادله F(x,y)=0 را یک تابع ضمنی مینامیم.

$$\boxed{y`=\frac{dy}{dx}=-\frac{F`x}{F`y}}$$

$$5x^4-3x=4y^4-y^3+y-1$$

$$F(x,y)=5x^4-3x-4y^4+y^3-y+1=0$$

$$y`=\frac{-F`(x)}{F`(y)}=-\frac{20x^3-3}{-16y^3+3y^2-1}$$

$$x^3+4x\cos y+y^2\sin x=1$$

$$x^3+4x\cos y+y^2\sin x-1=0$$

$$y`=\frac{-F`(x)}{F`(y)}=-\frac{3x^2+4\cos y+y^2\cos x}{4x(-\sin y)+2y\sin x}$$

مشتق با مراتب بالاتر:

$$y=f(x)\Rightarrow y`=f`(x)\Rightarrow y``=(y`)`\Rightarrow y```=(y``)`\Rightarrow y^{(4)}=(y```)`\Rightarrow$$

$$\boxed{[y^{(n)}]`=[y^{(n-1)}]`}$$

$$y=-6x^5+4x^3+7x^2-x+10$$

$$y`=-30x^4+12x^2+14x-1$$

$$y``=-120x^3+24x+14$$

$$y```=-360x^2+24$$

$$y^{(4)}=-720x$$

$$y^{(5)}=-720$$

$$y^{(6)}=0$$

فرمولی برای مشتق nام تابع زیر بدست آورید؟

$$y=\frac{1}{1+x}$$

$$y`=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$y``=\frac{2(1+x)}{(1+x)^4}=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y```=\frac{-3(1+x)^2 2}{(1+x)^6}=\frac{-2*3}{(1+x)^4} \Longrightarrow y^{(n)}=\frac{(-1)^n*1*2*....*n}{(1+x)^{n+1}}$$

$$y^{(4)}=\frac{2*3*4(1+x)^3}{(1+x)^8}=\frac{2*3*4}{(1+x)^5} \qquad y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

ماکزیمم نسبی:

گوئیم تابع f در نقطه X=C دارای ماکزیمم نسبی است هر گاه بازه بازی مانند I شامل نقطه c موجود باشد بطوزیکه به ازای هر x در بازه I داشته باشیم.

$$\boxed{c,x\in I \Longrightarrow f(x)\leqslant f(c)}$$

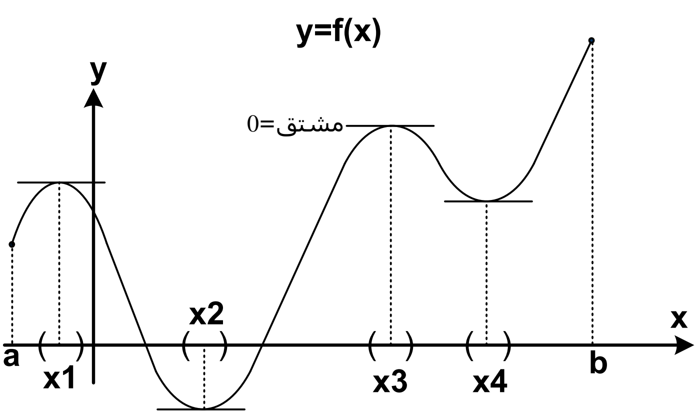
مینیمم نسبی:

گوئیم تابع f در نقطه X=C دارای مینیمم نسبی است هر گاه بازه بازی مانند I شامل نقطه c موجود باشد بطوزیکه به ازای هر x در بازه I داشته باشیم.

$$\boxed{c,x\in I \Longrightarrow f(x)\geqslant f(c)}$$

اکسترمم نسبی:

گوئیم تابع f در نقطه X=C دارای اکسترمم نسبی است هر گاه در نقطه c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد.



x1,x3= ماکزیمم نسبی **x2,x4=** مینیمم نسبی

نقطه a از سمت چپ و نقطه b ازسمت راست تعریف نشده است پس نمیتواند ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد.

ماکزیمم مطلق:

گوئیم تابع f در نقطه X=C ماکزیمم مطلق دارد هرگاه به ازای هر x در دامنه f داشته باشیم،

$f(x) \leqslant f(c)$ (بیشترین مقدار در نقطه C)

در مثال قبل نقطه b ماکزیمم مطلق است.

مینیمم مطلق:

گوئیم تابع f در نقطه X=C مینیمم مطلق دارد هرگاه به ازای هر x در دامنه f داشته باشیم،

$f(x) \geqslant f(c)$ (کمترین مقدار در نقطه C)

در مثال قبل نقطه X2 مینیمم مطلق است.

نقطه بحرانی:

نقطه X=C را نقطه بحرانی تابع fمینامیم هرگاه مشتق تابع fدر نقطه C موجود نباشد ویا در صورت وجود مشتق در نقطه C مشتق آن در نقطه C برابر صفر باشد.

قضیه:فرض کنیم که تابع fدر نقطه C اکسترمم نسبی داشته باشد در اینصورت اگر مشتق تابع f در نقطه C موجود باشد آنگاه $f'(C)=0$

نقاط بحرانی تابع زیر را بدست آورید؟

$f(x)=x^3+7x^2-5x$

$f'(x)=3x^2+14x-5=0 \Longrightarrow \begin{cases} x1=-5 \\ x2=\frac{1}{3} \end{cases}$ نقاط بحرانی

اگر تابع اکسترمم نسبی داشته باشد در این نقاط است.

نقاط بحرانی تابع زیر را بدست آورید؟

$f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-1)$

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}(x-1)+x^{\frac{2}{3}}=\frac{2(x-1)}{3x^{\frac{1}{3}}}+x^{\frac{2}{3}}=\frac{2(x-1)+3x}{3x^{\frac{1}{3}}}$

$3x^{\frac{1}{3}}=0 \xRightarrow{\text{مشتق تعریف نشده}} x=0$

$2(x-1)+3x=0 \xRightarrow{\text{مشتق مساوی صفر}} 5x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{5}$

قضیه:آزمون مشتق اول

فرض کنیم که Cنقطه بحرانی تابع f باشد.

1) $\begin{cases} \text{if } x\in(a,c) \;\&\; f'(x)>0 \\ \text{if } x\in(c,b) \;\&\; f'(x)<0 \end{cases}$ تابع f در نقطه C ماکزیمم نسبی دارد.

2) $\begin{cases} \text{if } x\in(a,c) \;\&\; f'(x)<0 \\ \text{if } x\in(c,b) \;\&\; f'(x)>0 \end{cases}$ تابع f در نقطه C مینیمم نسبی دارد.

مقادیر اکسترمم نسبی تابع f را در صورت وجود بدست آورید؟

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x+3$

$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3=0 \Rightarrow x^2=4 \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$ نقاط بحرانی

$f(2)=-1$

$f(-2)=7$

X		-2		2	
f`(X)	+	0	−	0	+

X= -2 ماکزیمم نسبی از مثبت به منفی

X= 2 مینیمم نسبی از منفی به مثبت

فرض کنیم تابع f در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد در اینصورت:

1) $\text{if } x\in(a,b) \;\&\; f'(x)\geqslant 0 \xRightarrow{(a,b)}$ تابع f صعودی است

2) $\text{if } x\in(a,b) \;\&\; f'(x) > 0 \xRightarrow{(a,b)}$ تابع f اکیدا صعودی است

3) $\text{if } x\in(a,b) \;\&\; f'(x)\leqslant 0 \xRightarrow{(a,b)}$ تابع f نزولی است

4) $\text{if } x\in(a,b) \;\&\; f'(x) < 0 \xRightarrow{(a,b)}$ تابع f اکیدا نزولی است

مثال:مشخص کنید تابع f در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولیست ؟

$f(x)=x^3-9x^2+15x-5$

$f'(x)=3x^2-18x+15=0 \Rightarrow 3(x^2-6x+5)=0 \begin{cases} x1=1 \\ x2=5 \end{cases}$

X		1		5	
f`(X)	+	0	−	0	+
		ماکزیمم نسبی		مینیمم نسبی	

مثال:مشخص کنید تابع f در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولیست و نقاط اکسترمم نسبی آنرا در صورت وجود بدست آورید؟

$f(x)=\frac{x+2}{x-3}$

$f'(x)=\frac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2} \Longrightarrow f'(x)<0$ تابع f اکیدا نزولی است

$(x-3)=0 \Longrightarrow x=3$ در نقطه X=3 مشتق تعریف نشده و بحرانی است

X		3	
f`(X)	−	تعریف نشده	−

چون مشتق تغییر علامت نمیدهد اکسترمم نسبی ندارد

قضیه:آزمون مشتق دوم

فرض کنیم تابع f در نقطه C ،نقطه بحرانی داشته باشد،در اینصورت اگر مشتق دوم تابع f در نقطه C موجود باشد.

1) اگرتابع f در نقطه C مینیمم نسبی داشته باشد $\Longrightarrow f''(C)>0$

2) اگرتابع f در نقطه C ماکزیمم نسبی داشته باشد $\Longrightarrow f''(C)<0$

با استفاده از آزمون مشتق دوم اکسترممهای نسبی تابع f را در صورت وجود بدست آورید؟

$f(x)=x^2e^{-x}$

$e^x>0$

$f'(x)=2xe^{-x}+(-1)e^{-x}x^2=xe^{-x}(2-x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$

$f'(x)=0\Rightarrow x(2-x)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ نقاط بحرانی

$f''(x)=\frac{(2-2x)e^x-e^x x(2-x)}{e^{2x}}=\frac{e^x(2-2x-2x+x^2)}{e^{2x}}=\frac{2-4x+x^2}{e^x}$

$f''(0)=\frac{2}{e^0}=\frac{2}{1}=2>0$ تابع fدرنقطه X=0 مینیمم نسبی دارد

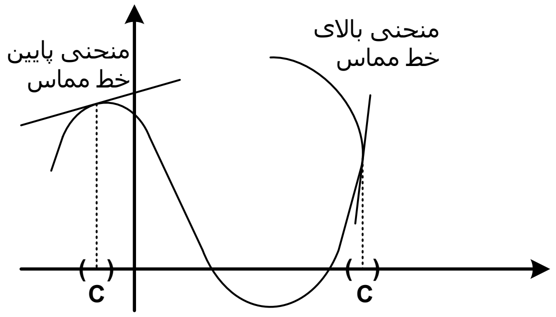
$f''(2)=\frac{2-8+4}{e^2}=\frac{-2}{e^2}<0$ تابع fدرنقطه X=2 ماکزیمم نسبی دارد

تعریف تقعر یک منحنی:(منحنی بالای خط مماس)

گوئیم تقعر منحنی fدرنقطه(C,f(C)) رو به بالاست هرگاه خط مماس بر منحنی در نقطه C موجود باشد و همچنین در بازه ای مانند I که شامل نقطه Cمیباشد،منحنی در این بازه بالای خط مماس قرار بگیرد.

تعریف تقعر یک منحنی:(منحنی پایین خط مماس)

گوئیم تقعر منحنی تابع fدرنقطهC رو به پایین است هرگاه خط مماس بر منحنی در نقطه C موجود باشد و همچنین در بازه ای مانند I که شامل نقطه Cمیباشد،منحنی در این بازه پایین خط مماس قرار بگیرد.



قضیه:فرض کنیم به ازای هر x در بازه باز I مشتق دوم x موجود باشد در اینصورت:

1) $\forall x\in I \ \&\ f''(x)>0$ تقعر منحنی در بازه I بسمت بالاست

2) $\forall x\in I \ \&\ f''(x)<0$ تقعر منحنی در بازه I بسمت پایین است

مشخص کنید که تابع f در چه بازه هایی تقعرش رو به بالا و در چه بازه هایی تقعرش رو به پایین است؟

$f(x)=x^4-6x^2+8x+10$

$f'(x)=4x^3-12x+8$

$f''(x)=12x^2-12=0\Rightarrow x^2=1 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

X		-1		1	
$f''(X)$	+	●	−	●	+
	بسمت بالا		بسمت پایین		بسمت بالا

تعریف نقطه عطف:

نقطه C و f(C) روی نمودار تابع f(X) را نقطه عطف گویند هرگاه نمودار f در این نقطه خط مماس داشته باشد و مشتق دوم تابع f در عبور از نقطه C تغییر علامت بدهد.

در مثال قبلی 1,1- نقطه عطف می باشند.

قضیه: فرض کنیم که تابع f در نقطه C نقطه عطف داشته باشد ،در اینصورت اگر مشتق دوم تابع f در نقطه Cموجود باشد،آنگاه $f''(C)=0$

در مثال قبلی 1,1- نقاط عطف تابع f هستند.

مجانب ها:

1- مجانب قائم:

خط X=a رامجانب قائم تابع f(x) گوئیم هرگاه: $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\infty}$

مثال: مجانب های قائم توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید؟

$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$

$x^2-3x+2=0\Rightarrow(x-2)(x-1)=0 \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}=\infty$ X=1 مجانب قائم است

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}=\infty$ X=2 مجانب قائم است

$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$

$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$ X=1 مجانب قائم نیست

$\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty$ X=-1 مجانب قائم است

2- مجانب افقی:

خط y=b رامجانب افقی تابع f(x) گوئیم هرگاه: $\boxed{\lim_{x\to +,-\infty} f(x)=b}$

مثال: مجانب های قائم و افقی تابع زیر را در صورت وجود بدست آورید؟

$f(x)=\frac{x^2+5x+1}{4x^2-3}$

$4x^2-3=0\Rightarrow x^2=\frac{3}{4}\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{+\sqrt{3}}{2} \\ x=\frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ چون جزءریشه های صورت نیستند پس مجانبهای قائم هستند

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+1}{4x^2-3}=\frac{1}{4}\Rightarrow y=\frac{1}{4}$ مجانب افقی

3- مجانب مایل:

خط y=ax+b رامجانب مایل تابع f(x) گوئیم هرگاه: $\boxed{\lim_{x\to +,-\infty} f(x)=\infty}$

y=ax+b

$\boxed{a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}}$ $\boxed{b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]}$

مثال: مجانب های تابع زیر را در صورت وجود بدست آورید؟

$$f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x+2}$$

مجانب قائم نیست چون جزء ریشه صورت است. $x+2=0 \Longrightarrow x=-2$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\infty$$

چون حد یک عدد ثابت نیست پس مجانب افقی ندارد

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+6}{x+2} \begin{cases} \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+5x+6}{x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x}=1 \\ \lim_{x\to\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+6}{x+2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+6}{x+2}=3 \end{cases}$$

مجانب مایل $y=ax+b \Longrightarrow y=x+3$

قضیه هوپیتال:

> فرض کنیم که $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ اگر مشتق تابع f,g در نقطه a موجود باشد و g`(a) مخالف صفر باشد آنگاه
>
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$
>
> در حالتهای مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ میتوانیم از قاعده هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}\xRightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{0}{0}\xRightarrow{\text{هوپیتال}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{0}{0}\xRightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos 4x}{\ln\cos 5x}=\frac{0}{0}\xRightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-4\sin 4x}{\cos 4x}}{\frac{-5\sin 5x}{\cos 5x}}=\frac{4\sin 4x\cos 5x}{5\cos 4x\sin 5x}$$

$$=\frac{0}{0}\xRightarrow{\text{قواعد هم ارزی}}\lim_{x\to 0^+}\frac{4(4x)\cos 5x}{5\cos 4x(5x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{16\cos 5x}{25\cos 4x}=\frac{16}{25}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)}{\cot\pi x}=\frac{\ln(0)}{\cot\pi}=\frac{\infty}{\infty}\xRightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{-1}{1-x}}{-\pi(1+\cot^2\pi x)}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\pi(1-x)(1+\cot^2\pi x)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\pi(1-x)\frac{1}{\sin^2\pi x}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin^2\pi x}{\pi(1-x)}=\frac{0}{0}$$

$$\xRightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{x\to 1^-}\frac{2\pi\sin\pi x\cos\pi x}{-\pi}=0$$

رسم نمودارها:برای رسم نمودار تابع y=f(x) مراحل زیر را انجام میدهیم.

1- دامنه تعریف تابع f رامشخص میکنیم.

2-مجانب های نمودار تابع f را در صورت وجود تعیین میکنیم.

3- مشتق تابع f را بدست آورده و از روی آن مشخص میکنیم تابع در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولیست و همچنین نقاط اکسترمم نسبی تابع f را در صورت وجود بدست می آوریم.

4-مشتق دوم تابع f را بدست می آوریم و با توجه به آن مشخص میکنیم منحنی تابع fدر چه بازه هایی تقعرشان رو به بالا و در چه بازه هایی تقعرشان رو به پایین است ،و همچنین نقطه عطف تابع را در صورت وجود بدست می آوریم.

5-رفتار تابع را در نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه f بررسی میکنیم.

6-اطلاعات بدست آمده در مراحل فوق را در یک جدول بنام جدول تغییرات مشخص میکنیم.

7-برای دقیقتر شدن شکل نمودار تابع میتوانیم از چند نقطه کمکی استفاده کنیم.

$y=f(x)=-x^3+3x^2$

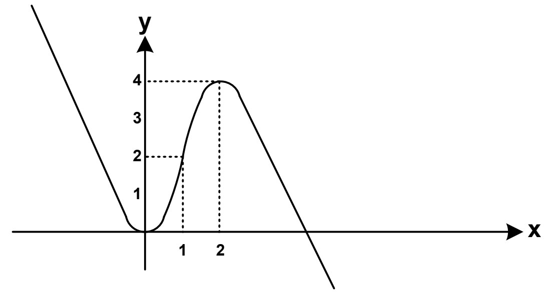
$D_f=R=(-\infty,+\infty)$

$y'=-3x^2+6x \Longrightarrow -3x^2+6x=0 \Longrightarrow -3x(x-2)=0$ نقاط بحرانی $\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$

$y''=-6x+6 \Longrightarrow x=1$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ رفتار تابع در ابتدا و انتها

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f`(x)		−		+		+		−	
f``(x)		+		+		−		−	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	2	↗	4	↘	$-\infty$
			مینیمم نسبی		نقطه عطف		ماکزیمم نسبی		



$y=f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ $x+1=0 \Longrightarrow x=-1$ مجانب قائم $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ مجانب افقی

$D_f=R-\{-1\}$

$y'=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$ تابع اکیدا صعودی

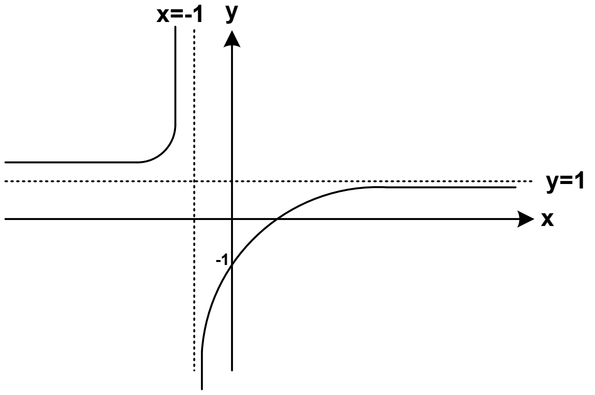
نقطه بحرانی در دامنه وجود ندارد $x+1=0 \Longrightarrow x=-1$

$y''=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$

x		-1	
-4	−		−
$(x+1)^3$	−		+
f``(x)	+		−

x	$-\infty$		-1		0 (نقطه دلخواه)		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$		$-$		$-$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ تعریف نشده $-\infty$	↗	-1	↗	1

$$\lim_{\substack{x\to -1^+ \\ x+1>0}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to -1^- \\ x+1<0}} f(x) = +\infty$$



انتگرالها

تابع اولیه:
تابع F(x) را تابع اولیه f(x) می نامیم هرگاه F`(x)=f(x) باشد،

$$F(x)=\sin x \xrightarrow{(\sin x)'=\cos x} f(x)=\cos x$$

$$F(x)=x^3+3x^2+4 \xrightarrow{(x^3+3x^2+4)'=3x^2+6x} f(x)=3x^2+6$$

قضییه:
اگر F(x) یک تابع اولیه f(x) باشد آنگاه F(x)+c نیز یک تابع اولیه f(x) میباشد،که در آن c یکعدد ثابت میباشد. $F'(x)=[f(x)+c]'=f(x)$

تعریف انتگرال: انتگرال تابع f(x) را با نماد $\int f(x)dx$ نمایش میدهند که برابر است با یک تابع اولیه f(x)

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+c}$$

$$\int \sin x dx=-\cos x+c$$

$$\int \cos x dx=\sin x+c$$

فرمولهای انتگرال گیری

1) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad (n\neq -1)$

2) $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

3) $\int \sin x dx=-\cos x+c$

4) $\int \cos x dx=\sin x+c$

5) $\int (1+\tan^2 x)dx=\tan x+c$

6) $\int e^x dx=e^x+c$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c$

8) $\int \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+c$

9) $\int (1+\cot^2 x)dx=-\cot x+c$

$$\int x dx=\frac{x^2}{2}+c$$

$$\int x^9 dx=\frac{x^{10}}{10}+c$$

$$\int dx=x+c$$

$$\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c$$

$$\int x^{-7}dx=\frac{x^{-6}}{-6}+c$$

$$\int \frac{dx}{x^3}=x^{-3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}+c$$

$$\int \sqrt{x}\,dx=x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}dx=x^{\frac{-3}{5}}dx=\frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}}+c$$

$$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+c$$

قضییه:

$$\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$
$$\int [f(x)-g(x)]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$
$$\int k.f(x)dx=k\int f(x)dx \qquad \text{If } k=c$$

$$\int (x+x^2)dx=\int x dx+\int x^2 dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+c$$

$$\int (x^9-1)dx=\int x^9 dx-\int dx=\frac{x^{10}}{10}-x+c$$

$$\int 5x^3 dx=5\int x^3 dx=\frac{5x^4}{4}+c$$

$$\int (5x^7-6x^3+4x^5-6x^4+2x^2-7)dx=\frac{5x^8}{8}-\frac{6x^4}{4}+\frac{4x^6}{6}-\frac{6x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}-7x+c$$

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}}-5\sqrt[3]{x^2}+\sin x+\cos x\right)dx=2\int x^{\frac{-1}{2}}dx-5\int x^{\frac{2}{3}}dx+\int \sin x+\int \cos x$$

$$\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{5x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-\cos x+\sin x+c$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \int [(\tan^2 x+1)-1]dx = \int(\tan^2 x+1)dx - \int 1dx = \tan x - x + c$$

$$\int(\tan^2 x+1)dx = \tan x + c \Longrightarrow \int \tan^2 x\,dx + \int dx = \tan x + c \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + c \\ \int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + c\end{array}}$$

$$\int \left(5e^x - \frac{6}{x} + \frac{4}{1+x^2}\right)dx = 5\int e^x dx - 6\int x^{-1}dx + 4\int \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 5e^x - 6\ \ln|x| + 4\mathrm{Arc}\ \tan x + c$$

$$\int \left(\frac{5x^3+6x^2+4x-7}{x^7}\right)dx = 5\int x^{-4}dx + 6\int x^{-5}dx + 4\int x^{-6}dx - 7\int x^{-7}dx$$

$$= \frac{5x^{-3}}{-3} + \frac{6x^{-4}}{-4} + \frac{4x^{-5}}{-5} - \frac{7x^{-6}}{-6} + c$$

قضیه:(تغییر متغییر)
فرض کنیم که $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد در اینصورت

$$\int f[g(x)]g`(x)dx = F[g(x)] + c$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{If } u=g(x) \\ du=g`(x)dx\end{array}\right. \Longrightarrow f(u)du = F(u) + c$$

$$\int \sqrt{x+1}\ dx \quad \left[\begin{array}{c}u=x+1 \\ du=dx+0 \\ du=dx\end{array}\right] \quad \int \sqrt{u}\ du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int (2x+1)\sqrt[3]{(x^2+x-7)^5}dx \quad \left[\begin{array}{c}u=x^2+x-7 \\ du=(2x+1)dx \\ dx=\frac{du}{2x+1}\end{array}\right] \quad \int (2x+1)\sqrt[3]{u^5}\ \frac{du}{2x+1}$$

$$\int \sqrt[3]{u^5}\ du = \int u^{\frac{5}{3}}\ du = \frac{u^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + c = \frac{3}{8}(x^2+x-7)^{\frac{8}{3}} + c$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{5\sqrt{\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+7\right)^3}}dx \quad \left[\begin{array}{c}u=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+7 \\ du=(x^2+x-1)dx\end{array}\right] \quad \int \frac{du}{5\sqrt{u^3}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{5}\int u^{\frac{-3}{2}} du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}} + c = \frac{-2}{5}u^{\frac{-1}{2}} + c = \frac{-2}{5}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+7\right)^{\frac{-1}{2}} + c$$

$$\int \frac{dx}{x+1} \quad \left[\begin{array}{c}u=x+1 \\ du=dx+0 \\ du=dx\end{array}\right] \quad \int u^{-1}\ du = \mathrm{Ln}\ |u| + c = \mathrm{Ln}\ |x+1| + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + c \qquad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{x-1} - \frac{dx}{x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{Ln}|x-1| - \mathrm{Ln}|x+1|) + c$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx \quad \left[\begin{array}{c}u=\cos x \\ du=-\sin x dx \\ dx=\frac{du}{-\sin x}\end{array}\right] \quad \int \frac{\sin x}{u}\cdot\frac{du}{-\sin x} = -\int \frac{du}{u}$$

$$= \mathrm{Ln}\ |u| + c = \mathrm{Ln}\ |\cos x| + c$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int \tan x\,dx = -\mathrm{Ln}\ |\cos x| + c \\ \int \cot x\,dx = \mathrm{Ln}\ |\sin x| + c\end{array}}$$

قضیه

$$\boxed{\begin{array}{l}\int [f(x)]^n f`(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad (n\neq -1) \\ \int [f(x)]^n f`(x)dx = \frac{f`(x)}{f(x)}dx = \mathrm{Ln}\ |f(x)| + c \quad (n=-1)\end{array}}$$

$$\int (2x+2)(x^2+2x-9)^{11}dx = \frac{(x+2x-9)^{12}}{12} + c$$

$$\int \sin x \cos^5 x = -\int(-\sin x)\cos^5 x\,dx = -\frac{\cos^6 x}{6} + c$$

$$\int \sin^{10} x \cos x\,dx = \frac{\sin^{11} x}{11} + c$$

$$\int \sin ax\,dx \quad \left[\begin{array}{c}u=ax \\ du=adx \\ dx=\frac{du}{a}\end{array}\right] \quad \int \sin u\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int \sin u du = \frac{1}{a}(-\cos u) + c$$

$$= \frac{-\cos ax}{a} + c$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int \sin ax\,dx = \frac{-\cos ax}{a} + c \\ \int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + c\end{array}} \quad \begin{array}{l}\int \sin 3x\,dx = \frac{\cos 3x}{3} + c \\ \int \cos 3x\,dx = \frac{\sin 3x}{3} + c\end{array}$$

قضیه:روش جزء به جزء
فرض کنیم که U و V دو تابع برحسب X باشند در اینصورت انتگرال بصورت زیر محاسبه میگردد

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

معمولا عبارت چند جمله ای را برابر u میگیریم

$$\int xe^x dx \quad \left[\begin{array}{l}u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=e^x dx \Longrightarrow \int dv = \int e^x dx \Longrightarrow v=e^x\end{array}\right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

$$\int x^2 e^x dx \quad \left[\begin{array}{l}u=x^2 \Longrightarrow du=2xdx \\ dv=e^x dx \Longrightarrow \int dv = \int e^x dx \Longrightarrow v=e^x\end{array}\right] \quad x^2e^x - \int e^x(2x)dx$$

$$= x^2e^x - 2\int xe^x dx \quad = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + c$$

روش جزء
به جزء

$$\int x\sin x\,dx \quad \left[\begin{array}{l} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=\sin x\,dx \Longrightarrow v=\int \sin x\,dx \\ \quad \Longrightarrow v=-\cos x \end{array}\right] = x(-\cos x)-\int -\cos x\,dx$$

$$=-x\cos x+\int \cos x\,dx = -x\cos x+\sin x+c$$

$$=$$

$$\int x^2\cos x\,dx \quad \left[\begin{array}{l} u=x^2 \Longrightarrow du=2x\,dx \\ dv=\cos x\,dx \Longrightarrow v=\int \cos x\,dx \\ \quad \Longrightarrow v=\sin x \end{array}\right] = x^2\sin x-\int \sin x(2x\,dx)$$

$$x^2\sin x-2\underbrace{\int x\sin x\,dx}_{\text{روش جزء به جزء}} \qquad = x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x)+c$$

$$\int \ln x\,dx \quad \left[\begin{array}{l} u=\ln x \Longrightarrow du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=dx \Longrightarrow v=x \end{array}\right] = (\ln x)x-\int x\frac{1}{x}\,dx = (\ln x)x-\int dx$$

$$=(\ln x)x-x+c$$

انتگرال نسبتهای مثلثاتی:

حالت اول:

$$\int \sin(ax)\sin(bx)dx = \frac{1}{2}\int[\cos(ax-bx)-\cos(ax+bx)]dx$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)dx \quad \frac{1}{2}\int[\cos(ax-bx)+\cos(ax+bx)]dx$$

$$\int \sin 3x\sin 5x\,dx=\frac{1}{2}\int[\cos(3x-5x)-\cos(3x+5x)]dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int \cos 2x\,dx-\int \cos 8x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 8x}{8}\right)+c$$

$$\int \cos 5x\cos 8x\,dx=\frac{1}{2}\int[\cos(-3x)+\cos(13x)]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int \cos 3x\,dx+\int \cos 13x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 13x}{13}\right)+c$$

حالت دوم:

$$\int \sin^n x\,dx=\int \sin x\sin^{n-1}x\,dx \xRightarrow{\sin^2 x=1-\cos^2 x}$$

$$\int \cos^n x\,dx=\int \cos x\cos^{n-1}x\,dx \xRightarrow{\cos^2 x=1-\sin^2 x}$$

n فرد باشد

$$\int \sin^3 x\,dx=\int \sin x\sin^2 x\,dx=\int \sin x(1-\cos^2 x)dx=\int(\sin x-\sin x\cos^2 x)dx$$

$$\int \sin x\,dx-\int \sin x\cos^2 x\,dx=\int \sin x\,dx+\int -\sin x\cos^2 x\,dx=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+c$$

$$\int \cos^5 x\,dx=\int \cos x\cos^4 x\,dx=\int \cos x(1-\sin^2 x)^2dx=\int \cos x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)dx$$

$$\int(\cos x-2\cos x\sin^2 x+\cos x\sin^4 x)dx=\int \cos dx-2\int \cos x\sin^2 x\,dx+\int \cos x\sin^4 x\,dx$$

$$=\sin x-2\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+c$$

حالت سوم:

$$\int \sin^n x\,dx \xRightarrow{\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}} =\int$$

$$\int \cos^n x\,dx \xRightarrow{\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}} =\int$$

n زوج باشد

$$\int \sin^2 x\,dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(\int dx-\int \cos 2x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+c$$

$$\int \cos^4 x\,dx=\int(\cos^2 x)^2dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2dx=\int \frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=\frac{1}{4}\left(\int dx+2\int \cos 2x\,dx+\int \cos^2 2x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(x+\frac{2\sin 2x}{2}+\int \cos^2 2x\,dx\right)=\frac{1}{4}\left(x+\sin 2x+\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[x+\sin 2x+\frac{1}{2}\left(\int dx+\int \cos 4x\,dx\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[x+\sin 2x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 4x}{4}\right)\right]+c$$

انتگرال معین:

فرض کنیم که تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد ،در اینصورت اگر $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد انتگرال معین تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ بصورت زیر تعریف میشود.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)}$$

$$\int_0^1(x^3-4x^2+5x+6)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+6x\right)_0^1=\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{5}{2}+6\right)^1-$$

$$(0-0+0+0)_0=\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{5}{2}+6=\frac{89}{12}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=(-\cos x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)-(-\cos 0+\sin 0)=(0+1)-(-1+0)=1+1=2$$

1) $\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b K.f(x)dx=K\int_a^b f(x)dx \quad \text{If } K=C$

4) $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

6) $\int_{-a}^a f(x)dx=0 \quad \text{If } f(-x)=-f(x)$ اگر تابع $f(x)$ تابعی فرد باشد

7) $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx \quad \text{If } f(-x)=f(x)$ اگر تابع $f(x)$ تابعی زوج باشد

$$\int_0^5 [x]dx = \int_0^1 [x]dx + \int_1^2 [x]dx + \int_2^3 [x]dx + \int_3^4 [x]dx + \int_4^5 [x]dx$$

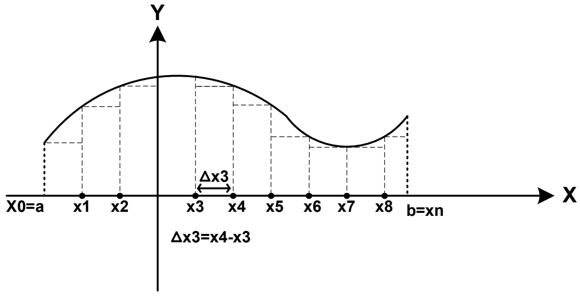
$$= \int_0^1 0dx + \int_1^2 1dx + \int_2^3 2dx + \int_3^4 3dx \quad \int_4^5 4dx$$

$$= 0\Big|_0^1 + x\Big|_1^2 + 2x\Big|_2^3 + 3x\Big|_3^4 + 4x\Big|_4^5 = (0-0)+(2-1)+(6-4)+(12-9)+(20-16)$$

$$=0+1+2+3+4=10$$

مساحت زیر منحنی:

1-مساحت زیر منحنی وقتی که تابع f نامنفی باشد.



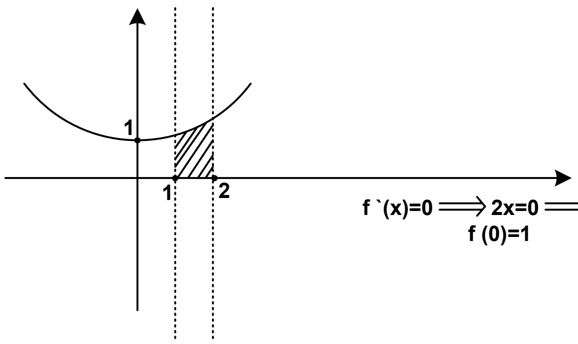
$\sum_{xi}^{n} f(xi)\Delta xi$ جمع مساحت مستطیلها

$$S=\lim_{x \to n}\sum_{xi}^{n} f(xi)\Delta xi = \int_a^b f(x)dx$$

با حد گرفتن تعداد مستطیلهای زیر منحنی را به بیشمار n میرسانیم.

1)
$X\in[(a,b)]$ And $f(x)\geqslant 0$ $\Longrightarrow S=\int_a^b f(x)dx$ مساحت زیر منحنی

مثال:مساحت محدود بین منحنی $y=f(x)=x^2+1$ و خطوط $x=1,x=2$ و محور مختصات را بدست آورید؟



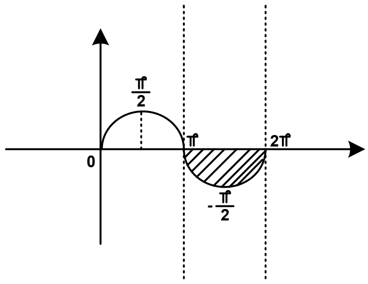
$$f'(x)=0 \Longrightarrow 2x=0 \Longrightarrow x=0$$
$$f(0)=1$$

$$S=\int_1^2 (x^2+1)dx \quad =\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{10}{3}$$

2-مساحت زیر منحنی وقتی که تابع f منفی باشد.

2)
$X\in[(a,b)]$ And $f(x)\leqslant 0$ $\Longrightarrow S=-\int_a^b f(x)dx$ مساحت زیر منحنی

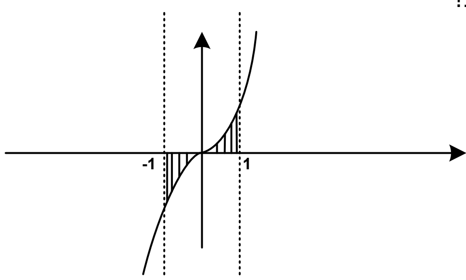
مثال:مساحت محدود بین منحنی $y=\sin x$ و خطوط $x=2\pi,x=\pi$ و محور مختصات را بدست آورید؟



$$S=-\int_\pi^{2\pi}\sin x dx = -(-\cos x)\Big|_\pi^{2\pi} = (\cos x)\Big|_\pi^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos\pi = 1-(-1)=2$$

3)
$X\in[(a,c)]\ ,\ f(x)\geqslant 0$ $X\in[(c,b)]\ ,\ f(x)\leqslant 0$ $\Longrightarrow S=\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$

مثال:مساحت محدود به منحنی $y=x^3$ و خطوط $x=1,x=-1$ و محور مختصات را بدست آورید؟



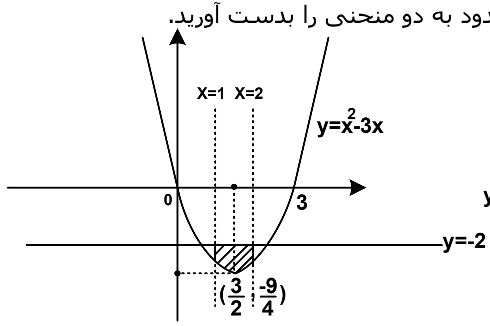
$$S=-\int_{-1}^{0} x^3dx + \int_0^1 x^3dx = \frac{-x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

مساحت بین دو منحنی

مساحت بین دو منحنی $y=f(x),y=g(x)$

$x\in[(a,b)]$ $y=f(x)$ $x\in[(a,b)]$ $y=g(x)$ $\Longrightarrow S=\left\|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right\|$

مثال:مساحت محدود به دو منحنی را بدست آورید.

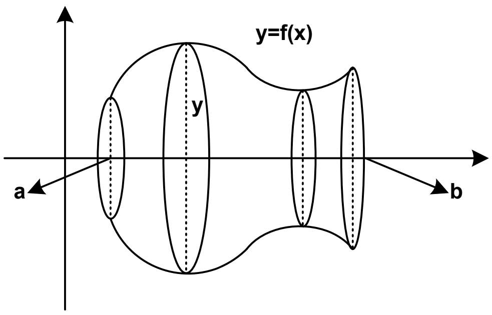


$$y=-2$$
$$y=x^2-3x$$
$$y'=2x-3$$
$$y'=2x-3=0 \Longrightarrow x=\frac{3}{2}$$
$$y=\frac{-9}{4}$$

بدست آوردن نقاط تلاقی توابع $f(x)=g(x) \Longrightarrow -2=x^2-3x \left[\begin{matrix}X=1\\X=2\end{matrix}\right.$

$$S=\left|\int_1^2 [x^2-3x-(-2)]dx\right| = \left|\int_1^2 (x^2-3x+2)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_1^2\right| =$$

$$\left|\left(\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right| = \left|\frac{7}{3}-\frac{9}{2}-2\right| = \left|\frac{14-27-12}{6}\right| = \frac{25}{6}$$



حجم حاصل از دوران منحنی y=f(x) حول محور X در بازه [(a,b)]

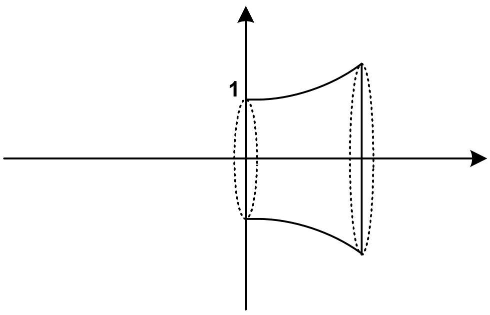
$$V=\pi\int_a^b y^2dx$$

حجم حاصل از دوران منحنی y=f(x) حول محور Y در بازه [(a,b)]

$$V=\pi\int_a^b X^2dx$$

مثال:حجم حاصل از دوران منحنی زیررا حول محورX در فاصله [(0,1)] رابدست آورید؟

$y=x^2+1$

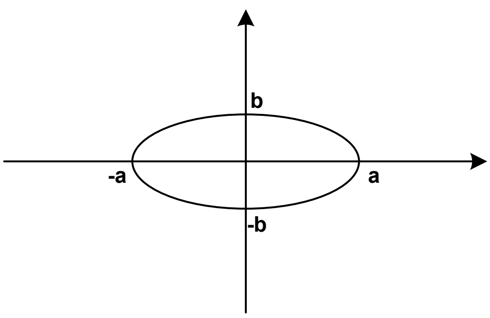


$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^1(x^2+1)^2dx=\pi\int_0^1(x^4+2x^2+1)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right]\Big|_0^1=\pi\left[\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right]=\frac{28\pi}{15}$$

مثال:حجم حاصل از دوران بیضی را حول محور Xبدست آورید؟(حجم توپ راگبی)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Longrightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a}\right)=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

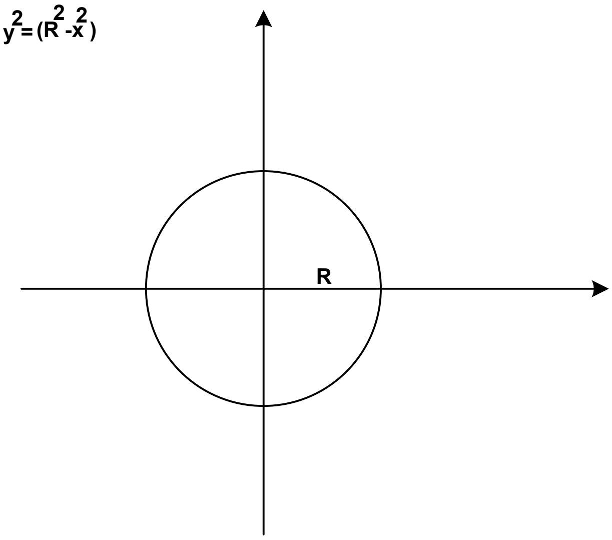
چون تابع زوج است

$$=2\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a$$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{2\pi b^2}{a^2}\times\frac{2a^3}{3}=\frac{4\pi b^2a}{3}$$

مثال:حجم حاصل از دوران دایره رابدست آورید؟(حجم کره)

$y^2=(R^2-x^2)$



$$=2\pi\int_0^R(R^2-x^2)=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)\Big|_0^R=2\pi\times\frac{2}{3}R^3=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Bay