دنباله حقیقی:

تابعی است مانند f از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه اعداد حقیقی

$f:N \longrightarrow R$ دنباله حقیقی

$f:N \longrightarrow Z$ دنباله صحیح

$f:N \longrightarrow \mathbb{C}$ دنباله مختلط

$f:N \longrightarrow N$ دنباله طبیعی

$N=\{1,2,3,\ldots\ldots\}$ مجموعه اعداد طبیعی

$Z=\{0,+-1,+-2,+-3,\ldots.\}$ مجموعه اعداد صحیح

$Q=\{\frac{p}{q} | p,q \in Z, q\neq 0\}$ مجموعه اعداد گویا(کلیه اعداد اعشاری مختوم)

به اعداد اعشاری نا مختوم اعداد گنگ گویند Q^c

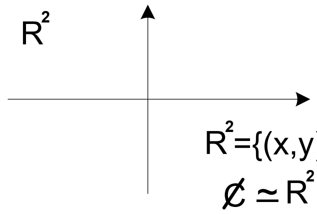
$W=\{0,1,2,3,\ldots\ldots\}$ مجموعه اعداد حسابی

$R=Q \cup Q^c$ مجموعه اعداد حقیقی

$$\boxed{N\subset W\subset Z\subset Q\subset R\subset \mathbb{C}}$$

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط بصورت دوبعدی نمایش داده میشود.

$$\mathbb{C}=(x,y)=x+iy \begin{cases} x= \text{مولفه حقیقی} \\ y= \text{مولفه موهومی} \\ i= \text{یکه موهومی} \end{cases} \qquad \begin{cases} i=\sqrt{-1} \\ i^2=-1 \qquad i^4=1 \\ i^3=-i \end{cases}$$



$R^2=\{(x,y) \mid x,y\in R\}$

$\mathbb{C} \simeq R^2$

مثال $x^2=-1 \xrightarrow{x=i} \begin{cases} i^2=-1 \\ (-i)^2=i^2=-1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x=+i \\ x=-i \end{matrix}$

$$\begin{matrix} (x,f(x)) \\ f:N\longrightarrow R \\ n\longrightarrow f(n) \end{matrix} \quad (n,f(n)) \longrightarrow (1,f(1)),(2,f(2)),(3,f(3)),\ldots\ldots\ldots \longrightarrow \{f(n)\}$$

چون مولفه های اول (x) جزء N میباشند ،نمایش داده نمیشوند.

$$=f(n)=\frac{n}{2n+1} \longrightarrow \overset{a_1}{\frac{1}{3}}, \overset{a_2}{\frac{2}{5}}, \overset{a_3}{\frac{3}{7}},\ldots\ldots\ldots$$

دنباله همگرا:

اگر دنباله رفته رفته به یک عدد خاص نزدیک شود همگرا گویند.

دنباله واگرا:

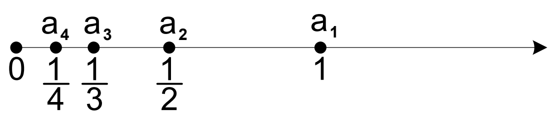
1-حد دنباله رفته رفته به $\pm\infty$ نزدیک شود.

2-دنباله رفته رفته به دو یا سه عدد خاص نزدیک شود.(همگرا به چند عدد)(برد دنباله چند عدد است)

$a_n=n \longrightarrow \{n\} \longrightarrow 1,2,3,\ldots.$

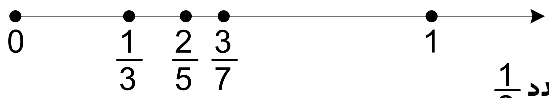
واگرا به $+\infty$

$a_n=\frac{1}{n} \longrightarrow \{\frac{1}{n}\} \longrightarrow 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\ldots\ldots$



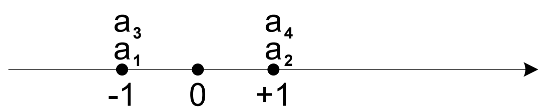
همگرا به عدد صفر

$a_n=\{\frac{n}{2n+1}\} \longrightarrow \frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\ldots\ldots\ldots$



همگرا به عدد $\frac{1}{2}$

$a_n=\{(-1)^n\} \longrightarrow -1,+1,-1,+1,\ldots.$



واگرا به ± 1

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0 \qquad \lim_{n\to+\infty} n=+\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \begin{cases} +1 & \text{زوج } n \\ -1 & \text{فرد } n \end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} =\frac{1}{2}$$

همگرایی یا واگرایی دنباله های زیر را بررسی کنید؟

1) $\{\frac{n^2}{2n+1}\} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n+1} = \frac{\infty}{\infty}$ $\begin{cases} \xrightarrow{\text{هم ارزی}} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty \\ \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \end{cases}$ (واگرا)

وقتی حد بسمت $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ مبهم میشود،میتوان از قاعده هوپیتال استفاده کرد.

هم ارزی:
$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots\dots+a_mx^{n-m} \underset{n\to\infty}{\sim} a_0x^n$
در چند جمله ای هر گاه x بسمت ∞ میل کند هم ارز جمله ای است که x دارای بیشترین توان باشد.

2) $\{\frac{2n^2-3n+7}{n^2+5n+8}\} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+7}{n^2+5n+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{hop} \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n} = 2$ (همگرا به عدد 2)

3) $\{\frac{3+7n}{n-3+5n^2}\} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3+7n}{n-3+5n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{hop} \lim_{n\to\infty} \frac{7}{10n} = 0$ (همگرا به عدد 0)

دنباله $\{a_n\}$ را صعودی میگوییم هر گاه به ازای هر n ، $a_n < a_{n+1} \longrightarrow f(n) < f(n+1)$
دنباله $\{a_n\}$ را نزولی میگوییم هر گاه به ازای هر n ، $a_n < a_{n+1} \longrightarrow f(n) > f(n+1)$

دنباله ای که صعودی یا نزولی باشد را دنباله یکنوا گوییم.

صعودی یا نزولی بودن تابع زیر را بررسی کنید؟

1) $\{\frac{1}{n}\}$ $\quad n<n+1 \longrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ (تابع نزولی است)

سری:

اگر $\{a_n\}$ یک دنباله باشد عبارت زیر یک سری نامتناهی نامیده میشود. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1+a_2+a_3+\dots$$

مجموع جزئی n ام سری:

عبارت $S_n = a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ را مجموع جزئی n ام سری مینامیم. $\longleftarrow$ $S_3=a_1+a_2+a_3$ $\quad S_1=a_1$

سری همگرا و سری واگرا:

اگر حاصل جملات سری یک عدد باشد سری همگرا ، و اگر حاصل جملات سری ∞ باشد سری واگرا مینامیم.

قضیه: 1

اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ (عکس این موضوع درست نمیباشد)

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ آنگاه هیچ نتیجه ای نمیگیریم

نتیجه خیلی مهم: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+3} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{hop} \frac{2}{1}=2$$ سری واگرا میباشد

قضیه: 2

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (سری هارمونیک یا سری همساز) واگراست.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ ضریب سری هارمونیک نیز واگرا میباشد.

سری هندسی:

هر سری بشکل زیر را سری هندسی گویند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \longrightarrow \underbrace{a+aq}_{q=\frac{aq}{a}}\underbrace{+aq^2}_{q=\frac{aq^2}{aq}}+\dots\dots$$

$a=$ جمله اول

$q=$ قدر نسبت

قضیه: 3

اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ یک سری هندسی باشد. آنگاه

$|q|\geq 1 \longrightarrow$ در اینحالت سری واگرا است.

$|q|<1 \longrightarrow$ در اینحالت سری همگرا است. و مجموع سری از رابطه $S=\frac{a}{1-q}$ بدست می آید.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2(3)^n = 6+18+54+\dots \longrightarrow q=3$$ سری واگرا میباشد

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5^{n-1}} = 3+\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\dots \longrightarrow q=\frac{1}{5}$$ سری همگرا میباشد $S=\frac{3}{1-\frac{1}{5}}=\frac{15}{4}$

1) اگر دو سری همگرا با هم جمع شوند ،مجموع آنها نیز همگرا خواهد بود

2) اگر یک سری همگرا با یک سری واگرا جمع شود ،مجموع سری واگرا خواهد شد.

3) مجموع دو سری واگرا مشخص نمیباشد.

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{2^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}$$ $\longrightarrow$ واگرا=همگرا +واگرا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}} = 3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\dots \longrightarrow q=\frac{1}{2}$$ سری همگرا میباشد

P-سری:

هر سری بشکل زیر را یک P-سری مینامیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

p= عدد ثابت

n= متغییر

4 قضیه:

اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ یک P-سری باشد. آنگاه

$|p|>1$ ⟵ در اینحالت سری همگرا است.

$|p|\leqslant 1$ ⟵ در اینحالت سری واگرا است.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \longrightarrow P=3$ سری همگرا

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \longrightarrow P=\frac{5}{2}$ سری همگرا

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n =$(سری هندسی) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots \longrightarrow q=\frac{1}{3}$ سری همگرا

در سری هندسی پایه ثابت است و توان عوض میشود و در P-سری پایه متغییر است و توان ثابت

5 آزمون نسبت یا دالامبر:

فرض کنیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری نامتناهی باشد در اینصورت

اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k<1$ سری همگرا است

اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k>1$ سری واگرا است

اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k=1$ آزمون بی نتیجه است

0) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \xrightarrow[2^{n+1}=2^n*2]{(n+1)!=n!*(n+1)} \lim_{n\to\infty} \frac{n!*2^n*2}{n!*(n+1)*2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$ سری همگرا است

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} 2n^2 = \infty \neq 0 \longrightarrow$ سری واگرا

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\text{P-سری}} P=\frac{1}{2}$ سری واگرا

$\overline{(n+1)!}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} \xrightarrow{\text{P-سری}} P=\frac{4}{3}$ سری همگرا

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+3} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{hop} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+3} = 2 \neq 0$ سری واگرا

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots \xrightarrow{\text{سری هندسی}} q=\frac{1}{2}$ سری همگرا

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n} \xrightarrow[\text{دالامبر}]{\text{آزمون}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!*(n+1)*5^n}{n!*5^n*5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = \infty$ سری واگرا

6 آزمون ریشه:

فرض کنیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات نا صفر باشد در اینصورت

اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k<1$ سری همگرا است

اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k>1$ سری واگرا است

اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k=1$ آزمون بی نتیجه است

$\log_{10} x = \log x$

$\log_e x = \text{Ln } x$ e=2.7

1) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(\text{Ln } n)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\text{Ln } n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\text{Ln } n} = 0$ سری همگرا است $|(-1)^{n+1}| = |\pm 1| = 1$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ سری همگرا است

7 آزمون مقایسه:

فرض کنیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ یک سری با جملات نامنفی باشند و $a_n \leqslant b_n$

1) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد(نتیجه عدد) ، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

2) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد(نتیجه ∞) ، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا است.

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\text{Ln } n} \xrightarrow{\text{چون}} n > \text{Ln } n \rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\text{Ln } n} \longrightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{سری واگرا}} , \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\text{Ln } n}}_{\text{سری واگرا}}$ ← رابطه 2

$(2n)! > (n!)^2 > n^n > \underset{a>1}{a^n} > n^a > \text{Ln } n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Ln } n}{n} = 0$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\text{Ln } n} = \infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{\text{چون}} \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} \longrightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{سری همگرا}} , \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{\text{سری هندسی همگرا}}$ ← رابطه 1

سری توانی: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$

هر سری بشکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ را یک سری توانی به مرکز C گویند.

هر سری بشکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را یک سری توانی به مرکز **صفر** گویند.

شعاع همگرایی ،بازه همگرایی:

بازه ای از x که سری مورد نظر در آن بازه همگرا میباشد.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lambda|x|<1 \rightarrow |x|<\frac{1}{\lambda}=r \rightarrow \begin{cases} -r<x<r \text{ (بازه همگرایی)} \\ X=-r \text{ و } X=-r \text{ باید جداگانه بررسی شود.} \end{cases}$$

$$r=\frac{1}{\lambda}\begin{cases} r=0 \rightarrow \lambda=\infty \\ r=\infty \rightarrow \lambda=0 \\ r=\frac{1}{\lambda} \rightarrow 0<\lambda<\infty \end{cases}$$

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| \xrightarrow{\lambda|x|<1} |x|<\frac{1}{\lambda}=r \rightarrow \begin{cases}\lambda=1 \\ r=1\end{cases} \rightarrow -1<x<1$$

$$x\in(-1,1) \quad -1<x<1$$

$$\begin{cases} x=1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty \quad \text{سری واگرا} \\ x=-1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} -1^n = \pm 1 \quad \text{سری واگرا} \end{cases}$$

سری متناوب:

به سری گویند که دنباله های آن یکی در میان مثبت و منفی میشود مانند وجود $(-1)^n$ در سری

قضییه:

در سری متناوب $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$

اگر a_n نزولی باشد و $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگراست.

$$2)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n} \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n\frac{x^n}{n}}\right| \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| \rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\,x^n x}{x^n(n+1)}\right| \rightarrow \lim_{n\to\infty}|x|\frac{n}{(n+1)}$$

$$|x|<1 \rightarrow -1<x<1$$

$$x\in(-1,1] \quad -1<x\leqslant 1$$

$$\begin{cases} x=1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1^n}{n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} \text{ براساس قضییه متناوب همگرا میباشد} \\ x=-1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ سری واگرا} \end{cases}$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}\,3^n} \longrightarrow \frac{\dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}\,3^{n+1}}}{\dfrac{x^n}{\sqrt{n}\,3^n}} \longrightarrow \frac{\sqrt{n}\,3^n x^n x}{\sqrt{n+1}\,x^n 3^n 3} \longrightarrow \frac{\sqrt{n}\,x}{3\sqrt{n+1}} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} |x| \frac{1}{3} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lambda|x|<1 \xrightarrow[\lambda=\frac{1}{3}]{} \frac{1}{3}|x|<1 \xrightarrow{r=3} |x|<3 \longrightarrow -3<x<3$$

$$x=3 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}\,3^n} \to \frac{3^n}{\sqrt{n}\,3^n} \to \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[P=\frac{1}{2}]{\text{سری-p}} \text{سری واگرا}$$

$$x=-3 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}\,3^n} \to \frac{-3^n}{\sqrt{n}\,3^n} \to -\frac{(-1)^n 3^n}{\sqrt{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow \text{سری متناوب همگرا}$$

$$x \in [-3,3)$$
$$-3 \leqslant x < 3$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{x^n}{n^2}} \longrightarrow \frac{n^2 x^n x}{x^n (n+1)^2} \longrightarrow \frac{n^2 x}{(n+1)^2} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$\lambda|x|<1 \xrightarrow[\lambda=1]{} |x|<1 \xrightarrow{r=1} -1<x<1$$

$$x=1 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \to \frac{1^n}{n^2} \to \frac{1}{n^2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[P=2]{\text{سری-p}} \text{سری همگرا}$$

$$x=-1 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \to \frac{(-1)^n}{n^2} \to \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \longrightarrow \text{سری متناوب همگرا}$$

$$x \in [-1,1]$$
$$-1 \leqslant x \leqslant 1$$

فرمولهای مشتق گیری

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = -(1+\cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(n^x)' = n^x \log_e a$

$(e^x)' = e^x$

$(\log x)' = \dfrac{1}{x\log_e a}$

$(\log_e x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\text{arc sin } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\text{arc cos } x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\text{arc tan } x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\text{arc cot } x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$(\sqrt[n]{x^m})' = \dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$

$\Longleftrightarrow$

فرمولهای انتگرال گیری

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

2) $\int \dfrac{1}{x} dx = Ln|x| + c$

3) $\int Sinx dx = -\cos x + c$

4) $\int Cosx dx = \sin x + c$

5) $\int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + c$

6) $\int e^x dx = e^x + c$

7) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arcsinx + c$

8) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = Arctanx + c$

9) $\int (1+\cot^2 x)dx = -\cot x + c$

روش انتگرال گیری بصورت جزء به جزء

فرض کنیم که U و V دو تابع برحسب X باشند در اینصورت انتگرال بصورت زیر محاسبه میگردد

معمولا عبارت چند جمله ای را برابر u میگیریم

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

هرگاه یک تابع جبری بصورت ضرب در کنار یک تابع غیر جبری قرار گیرد از روش جزء به جزء استفاده میشود.

1) $\int xe^x dx \quad \left[\begin{array}{l} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=e^x dx \Longrightarrow \int dv = \int e^x dx \Longrightarrow v=e^x \end{array}\right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

2) $\int x^2 e^x dx \quad \left[\begin{array}{l} u=x^2 \Longrightarrow du=2xdx \\ dv=e^x dx \Longrightarrow \int dv = \int e^x dx \Longrightarrow v=e^x \end{array}\right] \quad x^2e^x - \int e^x (2x)dx$

$x^2e^x - 2\underbrace{\int xe^x dx}_{\text{روش جزء به جزء}} = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + c$

3) $\int Ln\, x dx \left[\begin{array}{l} u=\ln x \Longrightarrow du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=dx \Longrightarrow v=x \end{array}\right] = (\ln x)x - \int x\dfrac{1}{x}dx = (\ln x)x - \int dx$

$= (\ln x)x - x + c$

4) $\int x\sin x dx \quad \left[\begin{array}{l} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=\sin x dx \Longrightarrow v=\int \sin x dx \\ \quad \Longrightarrow v=-\cos x \end{array}\right] = x(-\cos x) - \int -\cos x dx$

$= -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + c$

5) $\int x^2\cos x dx \quad \left[\begin{array}{l} u=x^2 \Longrightarrow du=2xdx \\ dv=\cos x dx \Longrightarrow v=\int \cos x dx \\ \quad \Longrightarrow v=\sin x \end{array}\right] = x^2\sin x - \int \sin x(2xdx)$

$x^2\sin x - 2\underbrace{\int x\sin x dx}_{\text{روش جزء به جزء}} \quad = x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + c$

6) $\int 3x\sin x dx = \left[\begin{array}{l} u=3x \Longrightarrow du=3dx \\ dv=\sin x dx \Longrightarrow v=\int \sin x dx \\ \quad \Longrightarrow v=-\cos x \end{array}\right] = -3x\cos x + 3\int \cos x dx$

$= -3x\cos x + 3\sin x$

$\int 3x\sin x dx = -3x\cos x + 3\sin x \xLongrightarrow{\text{روش تستی(جدولی)}}$

u مشتق گیری	dv انتگرال گیری
3x	sinx
3	- cosx
0	- sinx

u1dv1-u2dv2-.......

$= -3x\cos x + 3\sin x$

برای استفاده از این روش باید در ستون مشتق گیری به عدد صفر برسیم

توابع غیر جبری:
- توابع مثلثاتی
- توابع نهایی
- توابع لگاریتمی

بسط تیلور:

برای اینکه یک تابع بصورت چند جمله ای نوشته شود از بسط تیلور استفاده میشود.

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\ldots\ldots$$

بسط مک لرن:

بسط تیلور تابع f(x) در نقطه صفر

$$\xrightarrow{C=0} f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

بسط مک لرن

F(x)=sinx

$$f(x)=\sin x \longrightarrow \sin(0)+\cos(0)x+\frac{-\sin(0)}{2!}x^2+\ldots..$$

$$\begin{cases} f(0)=\sin 0=0 \\ f'(0)=\cos 0=1 \\ f''(0)=-\sin 0=0 \\ f'''(0)=-\cos 0=-1 \end{cases}$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots..+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots..$$

$$\sin x=0+x+0+\frac{-1}{3!}x^3+0+\frac{1}{5!}x^5+\ldots..$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots.. \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$ اگر از n یک واحد کم کنیم در قسمت فرمول کلیه n ها را به n+1 تبدیل میکنیم.(مانند فرمولهای دیگر sinx)

بسط مک لرن

F(x)=cosx

برای بدست آوردن بسط مک لرن تابع cos x با توجه به اینکه چند جمله ای تابع sin x را در اختیار داریم از روش زیر میتوان استفاده نمود.

چون مشتق تابع sin x برابر cos x است برای بدست آوردن چند جمله ای تابع cos x از چند جمله ای تابع sin x مشتق میگیریم.

برای بدست آوردن بسط مک لرن تابع sin x با توجه به اینکه چند جمله ای تابع cos x را در اختیار داریم از روش زیر میتوان استفاده نمود.

چون انتگرال تابع cos x برابر sin x است برای بدست آوردن چند جمله ای تابع sin x از چند جمله ای تابع cos x انتگرال میگیریم.

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots.. \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}} \underset{\text{انتگرال}}{\overset{\text{مشتق}}{\rightleftarrows}} \boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots.. \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}}$$

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots.. \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \underset{\text{انتگرال}}{\overset{\text{مشتق}}{\rightleftarrows}} \boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots.. \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

$$f(x)=e^x$$

$$\begin{cases} f(0)=e^0=1 \\ f'(0)=e^0=1 \\ f''(0)=e^0=1 \\ f'''(0)=e^0=1 \end{cases}$$

$$f(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots..$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$$

چون بسط f(x) یک اتحاد است میتوان بجای x، -x گذاشت.

$$f(x)=e^{-x}=\frac{1}{e^x}$$

$$x \longrightarrow -x$$

$$f(x)=e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots..$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}}$$

$$x \longrightarrow x^2$$

$$f(x)=e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots..$$

$$(e^x)^2$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\ldots \xrightarrow[\substack{\text{برای همگرا شدن}\\ q<1}]{q=x \quad S=\frac{1}{1-x}} |x|<1 \longrightarrow \frac{1}{1-x} \; |x|<1$$

$$\boxed{x<1 \quad \sum_{n=0} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}} \xrightarrow{x=-x} \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}} \xrightarrow{x=x^2} \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}}$$

انتگرال ↓   انتگرال ↓   انتگرال ↓

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = Ln(1-x)} \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = Ln(1+x)} \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = Tan^{-1} x}$$

$$\begin{cases} f(x)=\tan x \\ f'(x)=(1+\tan^2 x) \\ f''(x)=0+2(1+\tan^2 x)\tan x \\ f'''(x)=(2\tan x+2\tan^3 x)'=2(1+\tan^2 x)+2*3(1+\tan^2 x)\tan^2 x \end{cases} \qquad \begin{cases} f(0)=\tan 0=0 \\ f'(0)=(1+\tan^2 0)=1 \\ f''(0)=0 \\ f'''(0)=2+6*0=2 \end{cases}$$

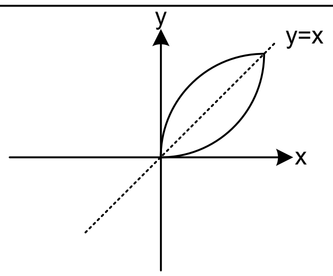
$$=0+x+0+\frac{2x^3}{3!}+0+\frac{4x^5}{5!}+\ldots \longrightarrow \boxed{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots}$$

$f(x)=\cot x$ بسط مک لرن ندارد چون $\cot(0)=\infty$

هر خط موازی محور x هانمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

$f:R \longrightarrow R$
if $x1,x2 \in D_f$
$f(x1)=f(x2) \Longrightarrow x1=x2$ تابع یک به یک

اگر تابع f یک به یک باشد آنگاه تابع f معکوس پذیر است و برای رسم نمودار تابع معکوس از نیمساز ربع اول و سوم استفاده میکنیم.



$f(x)=\frac{x-1}{x+1} \Longrightarrow f(x1)=f(x2) \Longrightarrow \frac{x1-1}{x1+1}=\frac{x2-1}{x2+1} \Longrightarrow x1=x2$ تابع یک به یک

$f(x)=-3x^2+5 \Longrightarrow f(x1)=f(x2) \Longrightarrow x1^2=x2^2 \Longrightarrow x1 \neq x2$ یک به یک نیست

$f:\bar{R} \longrightarrow R$, $f(x)=-3x^2+5 \Longrightarrow f(x1)=f(x2) \Longrightarrow x1^2=x2^2 \Longrightarrow x1=x2$ تابع یک به یک

$f:A \longrightarrow B$, $x1,x2 \in D_f \Longrightarrow x1<x2 \Longrightarrow f(x1)>f(x2)$ تابع اکیدا نزولی

$f:A \longrightarrow B$, $x1,x2 \in D_f \Longrightarrow x1<x2 \Longrightarrow f(x1)<f(x2)$ تابع اکیدا صعودی

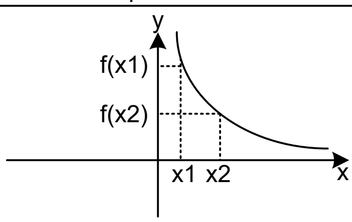
$f(x)=-5 \Longrightarrow \begin{matrix} f(x1)=-5 \\ f(x2)=-5 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} f(x1)\leqslant f(x2) & \text{تابع صعودی است} \\ f(x1)\not< f(x2) & \text{تابع اکیدا صعودی نیست} \end{matrix}$

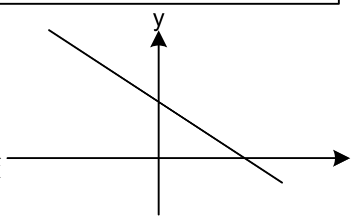
$f:R^+ \longrightarrow R$, $f(x)=-x^2+3 \Longrightarrow x1<x2 \Longrightarrow x1^2<x2^2 \Longrightarrow -x1^2>-x2^2 \Longrightarrow -x1^2+3>-x2^2+3$
تابع اکیدا نزولی

$f:A \longrightarrow B$, $x1,x2 \in D_f \Longrightarrow x1 \leqslant x2 \Longrightarrow f(x1) \geqslant f(x2)$ تابع نزولی

$f:R \longrightarrow R$, $f(x)=x^2+3 \Longrightarrow \begin{matrix} -1<0 \Longrightarrow \overset{4}{f(-1)} > \overset{3}{f(0)} & \text{تابع صعودی نیست} \\ 1<2 \Longrightarrow \overset{4}{f(1)} < \overset{7}{f(2)} & \text{تابع نزولی نیست} \end{matrix}$

برای نقض کردن میشود عدد گذاری کرد



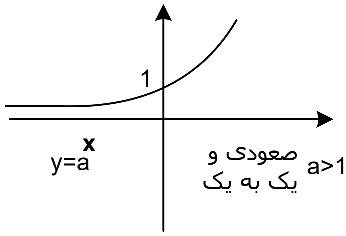


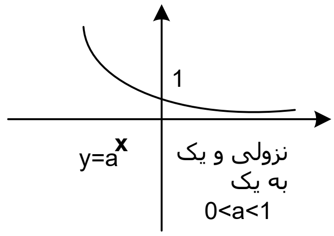
$a>0\ ,\ a\neq 1$

تابع نما یی

$f(x)=a^{x}$

$D_f=R \qquad R_f=(0,+\infty)=R^{+}$



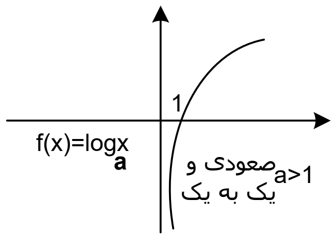


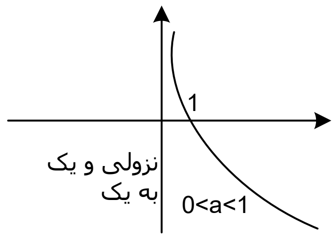
تابع لگاریتمی

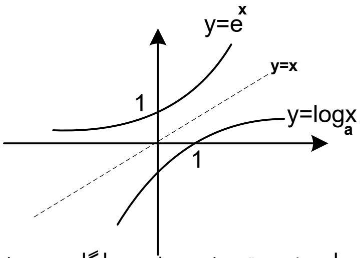
$f(x)=a^{x} \qquad D_{f^{-1}}=R_f=(0,+\infty)=R^{+}$

$f^{-1}(x)=\log_a x \qquad R_{f^{-1}}=D_f=R$

دو تابع معکوس هم رفتارند : هر دو صعودیند یا نزولی







$$f(x)=\log_{x-1}(4-x^2) \Longrightarrow \begin{matrix} 4-x^2>0 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{matrix} \ \text{خصوصیت لگاریتم} \Longrightarrow \begin{matrix} 4-x^2=0 & x=2 \quad x=-2 \\ x-1=0 & x=1 \\ x\neq 2 & x \ \ 2 \end{matrix}$$

	-2		1		2	
$4-x^2$	- 0	+		+	0	-
x-1	-	-	0	+		+

$D_f=(1,2)$

لگاریتم تنها برای اعداد مثبت تعریف میشود ،لگاریتم صفر و اعداد منفی تعریف نشده است.

تابع نما یی طبیعی

$f(x)=e^{x}$

$D_f=R \qquad R_f=(0,+\infty)=R^{+}$

$f(x)=\log_e x=\ln x$

$D_f=(0,+\infty)=R^{+} \qquad R_f=R$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

توابع هیپربولیک (هذلولوی)

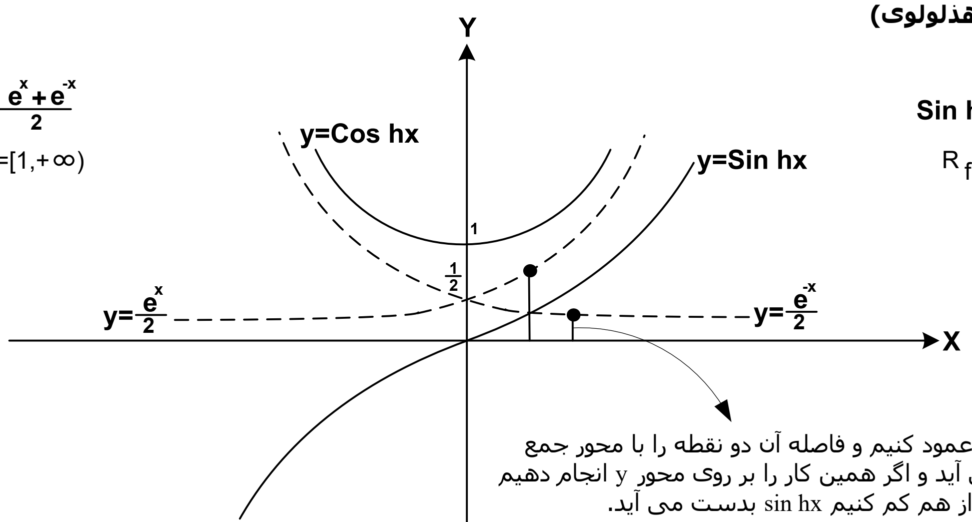
$$x+\frac{1}{x}>=2$$

$$\text{Cos hx}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$D_f=R \qquad R_f=[1,+\infty)$

$$\text{Sin hx}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$R_f=D_f=R$



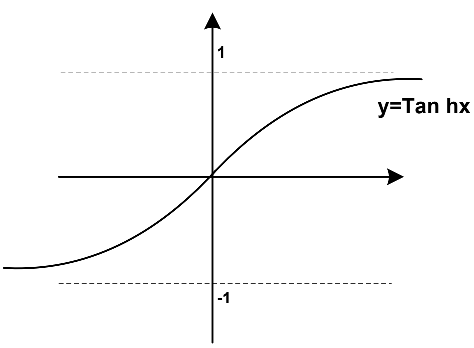
اگر دونقطه را بر محور xعمود کنیم و فاصله آن دو نقطه را با محور جمع کنیم cos hx بدست می آید و اگر همین کار را بر روی محور y انجام دهیم و فاصله بدست آمده را از هم کم کنیم sin hx بدست می آید.

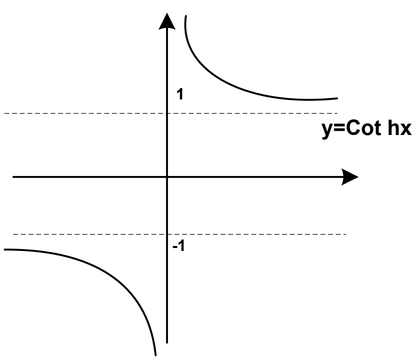
$$\text{Tan hx}=\frac{\text{Sinhx}}{\text{Coshx}}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$D_f=R \qquad R_f=(-1,+1)$

$$\text{Cot hx}=\frac{\text{Coshx}}{\text{Sinhx}}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$D_f=R-\{0\} \qquad R_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$





اتحادهای مهم توابع هیپربولیک:

1) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

2) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm \cosh x\sinh y$

3) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm \sinh x\sinh y$

4) $\tanh(x\pm y)=\dfrac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm \tanh x\tanh y}$

5) $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$

6) $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x=2\sinh^2 x+1=2\cosh^2 x-1$

مشتق توابع هیپربولیک:

y	y´
SinhU	$U'\cosh U$
CoshU	$U'\sinh U$
TanhU	$U'(1-\tanh^2 U)$
CothU	$-U'(\coth^2 U-1)$

U تابعی بر حسب X

اعداد مختلط:

$N\subset W\subset Z\subset Q\subset R\subset \mathbb{C}$ $\qquad \mathbb{C}=R^2$

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط بصورت دوبعدی نمایش داده میشود.

$$\mathbb{C}=(x,y)=x+iy\begin{cases}x= \text{مولفه حقیقی}\\ y= \text{مولفه موهومی}\\ i= \text{یکه موهومی}\end{cases}\qquad \begin{cases}i=\sqrt{-1}\\ i^2=-1 \qquad i^4=1\\ i^3=-i\end{cases}$$

R^2

$R^2=\{(x,y)\ \text{I}\ x,y\in R\}$

$\mathbb{C}\simeq R^2$

$$\begin{matrix}Z_1=(x_1,y_1)\\ Z_2=(x_2,y_2)\end{matrix}\begin{cases}z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\\ z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2+i^2y_1y_2=\underbrace{x_1x_2-y_1y_2}_{\text{مولفه حقیقی}}+i(\underbrace{x_1y_2+y_1x_2}_{\text{مولفه موهومی}})=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)\end{cases}$$

مزدوج عدد مختلط:

$$z=(x,y)=x+iy\xrightarrow{\text{مزدوج عدد مختلط}}\bar{z}=(x,y)=x-iy$$

$$\begin{matrix}Z_1=(3,2)\\ Z_2=(-1,5)\end{matrix}\begin{cases}z_1+z_2=(2,7)=2+i7\\ z_1z_2=(3+2i)(-1,5i)=-3+15i-2i+10i^2=-13+13i=(-13,13)\end{cases}$$

در تقسیم دو عدد مختلط همیشه صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب میکنیم.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1}{z_2}\times\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}\quad\begin{cases}\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{3+2i}{-1+5i}\times\dfrac{-1-5i}{-1-5i}=\dfrac{7}{26}-\dfrac{17}{26}i=(\dfrac{7}{26},-\dfrac{17}{26})\end{cases}$$

1) $\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}=\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}\times\dfrac{-1-2i}{-1-2i}=\dfrac{-3i^{30}-6i^{31}+i^{19}+2i^{20}}{-2i-4i^2+1+2i}=\dfrac{-3(-1)-6(-i)+(-i)+2}{-2i-4(-1)+1+2i}=\dfrac{3+6i-i+2}{-2i+4+1+2i}=\dfrac{5+5i}{5}=1+i=(1,1)$

$$\begin{cases}i^{30}=i^{28}*i^2=1*(-1)=-1\\ i^{31}=i^{28}*i^3=1*(-i)=-i\\ i^{19}=i^{16}*i^3=1*(-i)=-i\\ i^{20}=1\end{cases}$$

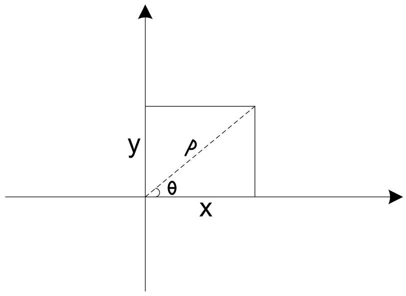
قدر مطلق عدد مختلط:

$$z=(x,y)=x+iy\xrightarrow{\text{قدر مطلق عدد مختلط}}|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$Z=2+3i\longrightarrow|z|=\sqrt{13}$$

مختصات قطبی:

	0	$\frac{\pi}{6}$ 30	$\frac{\pi}{4}$ 45	$\frac{\pi}{3}$ 60	$\frac{\pi}{2}$ 90	π 180	$\frac{3\pi}{2}$ 270	2π 360
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده



مختصات دکارتی (x,y)
مختصات قطبی (ρ, θ)

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ \rho=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \qquad \tan\theta=\frac{y}{x} \qquad \theta=\operatorname{Arc\,Tan}\frac{y}{x}$$

مثال:مختصات قطبی $(1,1)$ را بدست آورید؟

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=1 \longrightarrow \theta=45^\circ=\frac{\pi}{4} \longrightarrow \left(\sqrt{2}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right)$$

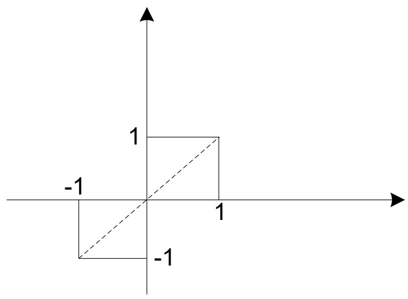
شکل قطبی اعداد مختلف:

$$Z=(x,y)=x+iy=\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho\,\mathrm{cis}\,\theta$$

تذکر: در مورد تعیین θ باید به مکان نقطه Z توجه داشت.

$$Z=1+i \xrightarrow[(1,1)]{\text{شکل قطبی } Z} \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x}=1 \longrightarrow \theta=45^\circ=\frac{\pi}{4} \end{cases} \longrightarrow Z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z=-1-i \xrightarrow[(-1,-1)]{\text{شکل قطبی } Z} \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x}=1 \longrightarrow \theta=225^\circ=\frac{5\pi}{4} \end{cases} \longrightarrow Z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$



$$\left.\begin{array}{l} Z_1=\rho(\cos\theta_1+\sin\theta_1) \\ Z_2=\rho(\cos\theta_2+\sin\theta_2) \\ \theta=\operatorname{Arg} Z \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{Z_1 Z_2=\rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))} \longrightarrow \boxed{Z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)}$$

$$\operatorname{Arg}(Z_1 Z_2)=\operatorname{Arg}(Z_1)+\operatorname{Arg}(Z_2)$$

$$\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$$ فرمول موآور

$$\left.\begin{array}{l} Z_1=\rho(\cos\theta_1+\sin\theta_1) \\ Z_2=\rho(\cos\theta_2+\sin\theta_2) \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\frac{Z_1}{Z_2}=\rho_1\rho_2(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{Z^n}=\frac{1}{\rho^n}(\cos n\theta-i\sin n\theta)}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)=\operatorname{Arg}(Z_1)-\operatorname{Arg}(Z_2)$$

مثال

$$Z_1=i+1 \longrightarrow \begin{cases} \rho_1=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2} \\ \operatorname{Tan}\theta=\frac{y}{x}=1 \longrightarrow \theta=45^\circ=\frac{\pi}{4} \end{cases} \longrightarrow Z_1=\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$Z_2=\sqrt{3}+i \longrightarrow \begin{cases} \rho_2=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4}=2 \\ \operatorname{Tan}\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow \theta=30^\circ=\frac{\pi}{6} \longrightarrow Z_2=2\,(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$Z_1Z_2=\rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)) \longrightarrow Z_1Z_2=2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})) \longrightarrow Z_1Z_2=2\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{12})+i\sin(\frac{5\pi}{12}))$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)) \longrightarrow \frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})) \longrightarrow \frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{12})+i\sin(\frac{\pi}{12}))$$

تذکر: معادله $az^2+bz+c=0$ را میتوان از فرمول زیر محاسبه کرد.

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

---

1) $$z^2-2iz-2=0 \longrightarrow \frac{2i\pm\sqrt{(2i)^2-4\times1\times(-2)}}{2}=\frac{2i\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{2i\pm2}{2}\begin{cases}\frac{2i+2}{2}=i+1\\ \frac{2i-2}{2}=i-1\end{cases}$$

2) $$z^2+(2i-3)z+5-i=0 \longrightarrow \frac{-(2i-3)\pm\sqrt{(2i-3)^2-4(5-i)}}{2}=\frac{3-2i\pm\sqrt{-4+9-12i-20+4i}}{2}=\frac{3-2i\pm\sqrt{-15-8i}}{2}=\frac{3-2i\pm\sqrt{(1-4i)^2}}{2}$$

$$=\frac{3-2i\pm(1-4i)}{2}\begin{cases}\frac{4-6i}{2}=2-3i\\ \frac{2+2i}{2}=1+i\end{cases}$$

ریشه های n ام یک عدد مختلط:

$$Z_k=\sqrt[n]{\rho}\,(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}),k=0,1,2,\ldots,n-1$$

مثال: ریشه های سوم عدد 1 را بدست آورید.

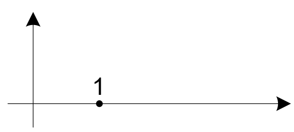
$$Z=\sqrt[3]{1} \longrightarrow Z^3=1 \longrightarrow Z=1$$

$$z=1+yi \longrightarrow z=1+0i \longrightarrow \begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1}=1\\ \operatorname{Tan}\theta=\frac{y}{x}=\frac{0}{1}=0 \longrightarrow \theta=0^\circ\end{cases}$$

$$z_0=\sqrt[3]{1}\,(\cos\frac{0+0}{3}+i\sin 0)=1$$

$$z_1=\sqrt[3]{1}\,(\cos\frac{2\pi+0}{3}+i\sin\frac{2\pi+0}{3})=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2=\sqrt[3]{1}\,(\cos\frac{4\pi+0}{3}+i\sin\frac{4\pi+0}{3})=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$Z=1 \quad \theta=0 \quad y=0$

$z=1+0i$

مثال: ریشه های چهارم عدد $z=1+i\sqrt{3}$ را بدست آورید.

$$z=1+i\sqrt{3} \longrightarrow \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4}=2 \\ Tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3} \longrightarrow \theta=\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$z_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{4}\right)$$

$$z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi+\frac{\pi}{3}}{4}+i\sin\frac{2\pi+\frac{\pi}{3}}{4}\right)$$

$$z_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi+\frac{\pi}{3}}{4}+i\sin\frac{4\pi+\frac{\pi}{3}}{4}\right)$$

$$z_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{6\pi+\frac{\pi}{3}}{4}+i\sin\frac{6\pi+\frac{\pi}{3}}{4}\right)$$

1)

$$Z^3=8 \longrightarrow Z=2$$

$$z=2+yi \longrightarrow z=2+0i \longrightarrow \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}=8 \\ Tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{0}{1}=0 \longrightarrow \theta=0^\circ \end{cases}$$

$$z_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0+0}{3}+i\sin 0\right)=2$$

$$z_1=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{2\pi+0}{3}+i\sin\frac{2\pi+0}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3}$$

$$z_2=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{4\pi+0}{3}+i\sin\frac{4\pi+0}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-i\sqrt{3}$$

2) $$z^2-iz+2=0 \longrightarrow \frac{i\pm\sqrt{(-i)^2-4(1)(2)}}{2}=\frac{i\pm\sqrt{-9}}{2}=\frac{i\pm\sqrt{-1}\sqrt{9}}{2}=\frac{i\pm 3i}{2}=\begin{cases} \frac{i+3i}{2}=2i \\ \frac{i-3i}{2}=-i \end{cases}$$

3) $$z^2+2z+4=0 \longrightarrow \frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-1}\sqrt{3}\sqrt{4}}{2}=\frac{-2\pm 2i\sqrt{3}}{2}= \longrightarrow \begin{cases} \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3} \\ \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3} \end{cases}$$

4)

$$Z_1=2+3i \longrightarrow \begin{cases} \rho_1=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{13} \\ Tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{3}{2} \end{cases} \longrightarrow Z_1=\sqrt{13}\left(\cos[Arc\tan\frac{3}{2}]+i\sin[Arc\tan\frac{3}{2}]\right)$$

$$Z_2=1-i \longrightarrow \begin{cases} \rho_1=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2} \\ Tan\theta=\frac{y}{x}=1 \longrightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases} \longrightarrow Z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_1Z_2=(2+3i)(1-i)=2-2i+3i-3i^2=2-2i+3i+3=5+i$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(2+3i)}{(1-i)}\times\underbrace{\frac{i+1}{i+1}}_{\bar{Z}_2}=\frac{2i+2+3i^2+3i}{i+1-i^2-i}=\frac{2i+2-3+3i}{i+1+1-i}=\frac{5i-1}{2}$$

توابع مختلط:

دربحث مربوط به توابع حقیقی مشاهده میشود که نمودار هر تابع را میتوان بصورت یک منحنی یا یک سطح نشان داد.در توابع مختلط چنین نمایشی مقدور نیست.

تابع **W=F(Z)** در واقع هر نقطه **Z** از ناحیه **D** واقع در صفحه **X,Y** را به یک نقطه **W** واقع در ناحیه **D´** از صفحه **U,V** تبدیل میکند.

$$Z=x+iy \longrightarrow W=u+iv$$

بدین جهت وقتی از تابع **W=F(Z)** در تبدیل ناحیه ای از صفحه **Z** به داخل ناحیه ای در صفحه **W** صحبت میشود در آن صورت به تابع **W=F(Z)** یک نگاشت یا تبدیل میگویند.

به نگاشتی که زاویه را چه از نظر اندازه و چه از نظر جهت بدون تغییر منتقل کند ،نگاشت همدیس گویند.

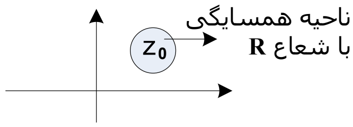
تذکر:

در توابع مختلط،حد ،پیوستگی و مشتق مانند توابع حقیقی تعریف میشود.

تعریف 1):

تابع **W=F(Z)** را در نقطه Z_0 تحلیلی مینامند هرگاه یک همسایگی از Z_0 موجود باشد که این تابع در تمام نقاط این همسایگی دارای مشتق باشد.

تعریف 2):



تابع **W=F(Z)** را یک تابع تام نامند هرگاه در کلیه نقاط صفحه **Z** تحلیلی باشد.

قضیه اول کشی ریمن:

هرگاه تابع $f(z)=u+iv$ درنقطه $Z=x+iy$ دارای مشتق باشد آنگاه:

$$f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$1)\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\longrightarrow U_x=V_y}\qquad \text{(معادلات کشی ریمن)}\qquad 2)\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\longrightarrow U_y=-V_x}$$

قضیه دوم کشی ریمن:

هرگاه u و v در تابع $f(z)=u+iv$ در نقطه $Z=x+iy$ در معادلات کشی ریمن صدق کرده و در یک همسایگی از (x,y) پیوسته و بامشتقات جزعی پیوسته باشد ،آنگاه $f'(z)$ موجود و برابر است با:

پیوستگی یک تابع: گوئیم تابع f در نقطه a پیوسته است هرگاه $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$
مانند توابع جبری و سینوسی

$\boxed{\text{پیوستگی تابع در } (a,b)}$

گوئیم تابع f در بازه (a,b) پیوسته است هرگاه به ازای هر $x\in(a,b)$ تابع f در نقطه x پیوسته باشد.

$$\boxed{f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\longrightarrow U_x+iV_x}$$

مثال:مشتق تابع $f(x)=z^2$ را در صورت وجود بیابید؟

$$f(x)=z^2=zz=(x+iy)(x+iy)=\overbrace{x^2-y^2}^{u}+i\overbrace{(2xy)}^{v}\qquad \begin{cases}U_x=2x\\ V_y=2x\end{cases}\longrightarrow U_x=V_y\qquad \begin{cases}U_y=-2y\\ V_x=2y\end{cases}\longrightarrow U_y=-V_x$$

چون تابع در معادلات کشی ریمن صدق کرده و تابع و مشتقات جزعی آن پیوسته میباشد پس تابع مشتق پذیر است.

$$f'(z)=U_x+iV_x=2x+i2y=2(x+iy)=2z$$

مثال:مشتق تابع $f(x)=\bar{z}$ را در صورت وجود بیابید؟

$$\bar{Z}=x-iy\ \begin{cases}u=x\\ v=-y\end{cases}\qquad \begin{cases}U_x=1\\ V_y=-1\end{cases}\longrightarrow U_x\neq V_y\qquad \begin{cases}U_y=0\\ V_x=0\end{cases}\longrightarrow U_y=-V_x$$

چون تابع در معادلات کشی ریمن صدق نمیکند تابع مشتق پذیر نیست.

مثال:مشتق تابع $f(x)=|z|^2$ را در صورت وجود بیابید؟

$$f(x)=|z|^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2\longrightarrow \overbrace{x^2+y^2}^{u}+\overbrace{0}^{v}i\qquad \begin{cases}U_x=2x\\ V_y=0\end{cases}\longrightarrow U_x=V_y\longrightarrow 2x=0\longrightarrow x=0$$

$$\begin{cases}U_y=2y\\ V_x=0\end{cases}\longrightarrow U_y=-V_x\longrightarrow 2y=0\longrightarrow y=0$$

تابع تنها در (0,0) مشتق پذیر است.

$$f'(z)=U_x+iV_x=2x+i0\longrightarrow x=0$$

مثال:مشتق تابع $f(z)=(\mathrm{Re}\, z)^2+i(\mathrm{Im}\, z)^2$ را در صورت وجود بیابید؟

$\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Real}\, z = x$

$\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Image}\, z = y$

$\longrightarrow f(x)=\overset{u}{x^2}+i\overset{v}{y^2}$

$\begin{cases} U_x=2x \\ V_y=2y \end{cases} \longrightarrow U_x=V_y \longrightarrow 2x=2y \longrightarrow x=y$

$\begin{cases} U_y=0 \\ V_x=0 \end{cases} \longrightarrow U_y=-V_x$

تابع تنها درخط $y=x$ مشتق پذیر است.

$f'(z)=U_x+iV_x=2x+0=2x$

پیوستگی تابع

$f(x)=y=2x$

1) $f(a)=2a$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)=2a$

3) $[\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)]$

$(1,2)$: 1 — a — 2

تابع در بازه $(1,2)$ پیوسته است چون در a که در این بازه است پیوسته است.

توابع همساز:

تابع پیوسته **u(x,y)** را تابع همساز نامند هرگاه دارای مشتقات جزعی مرتبه اول و دوم پیوسته بوده و در معادله لاپلاس **(Uxx+Uyy=0)** صدق کند.

هرگاه **f(Z)=U+iV** تابع تحلیلی در نقطه **Z** باشد آنگاه **U,V** توابع همساز هستند.

مزدوج همساز:

V را مزدوج همساز تابع همساز **U** نامند .هرگاه **f(Z)=U+iV** تابع تحلیلی باشد.چنانچه **U** در دست باشد آنگاه با توجه به معادلات کشی ریمن میتوان **V** (مزدوج همساز **U**) را مشخص کرد.

مشتقات جزعی مرحله اول

مشتقات جزعی مرحله دوم

$U(x,y) \begin{cases} U_x \begin{cases} U_{xx} \\ U_{xy} \end{cases} \\ U_y \begin{cases} U_{yx} \\ U_{yy} \end{cases} \end{cases}$

مثال:

آیا تابع $u=x^2-y^2$ تابع همساز است ؟مزدوج همساز آن را درصورت همساز بودن بدست آورید.

$u=x^2-y^2 \begin{cases} U_x=2x \xrightarrow{(1)} U_{xy}=0 \\ U_{xx}=2 \\ U_y=-2y \xrightarrow{(2)} U_{yx}=0 \\ U_{yy}=-2 \end{cases}$

با توجه به اینکه مشتقات جزعی مرحله اول و دوم پیوسته هستند و در $U_{xx}+U_{yy}=2+(-2)=0$ معادله لاپلاس صدق میکند تابع همساز است.

تعیین مزدوج همساز از طریق رابطه اول کشی ریمن ومقایسه با رابطه دوم
$U_x=V_y$

$\begin{cases} U_x=2x \xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{انتگرال}} V=2xy+h(x) \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} V_x=2y+h'(x) \\ U_y=-V_x \xrightarrow{U_y=-2y} \overset{U_y}{-2y}=\overset{-V_x}{-2y+h'(x)} \longrightarrow h'(x)=0 \longrightarrow h(x)=0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{V=2xy}$

تعیین مزدوج همساز از طریق رابطه دوم کشی ریمن ومقایسه با رابطه اول
$U_y=-V_x$

$\begin{cases} U_y=-2y \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{انتگرال}} \overset{U_y=-V_x}{V=2xy+h(x)} \xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{مشتق}} V_y=2x+h'(x) \\ U_x=V_y \xrightarrow{U_x=2x} 2x=2x+h(x) \longrightarrow h'(x)=0 \longrightarrow h(x)=0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{V=2xy}$

مثال:

آیا تابع $u=e^x\cos y$ تابع همساز است ؟مزدوج همساز آن را درصورت همساز بودن بدست آورید.

$u=e^x\cos y \begin{cases} U_x=e^x\cos y \xrightarrow{(1)} U_{xy}=-e^x\sin y \\ U_{xx}=e^x\cos y \\ U_y=-e^x\sin y \xrightarrow{(2)} U_{yx}=-e^x\sin y \\ U_{yy}=-e^x\cos y \end{cases}$

با توجه به اینکه مشتقات جزعی مرحله اول و دوم پیوسته هستند و در معادله لاپلاس صدق میکند تابع همساز است.

$U_{xx}+U_{yy}=e^x\cos y-e^x\cos y=0$

$U_x=V_y \begin{cases} U_x=e^x\cos y \xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{انتگرال}} V=e^x\sin y+h(x) \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق}} V_x=e^x\sin y+h'(x) \\ U_y=-V_x \longrightarrow \overset{U_y}{-e^x\sin y}=\overset{-V_x}{-e^x\sin y+h'(x)} \longrightarrow h'(x)=0 \longrightarrow h(x)=0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{V=e^x\sin y}$

$U_y=-V_x \begin{cases} U_y=-e^x\sin y \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{انتگرال}} \overset{U_y=-V_x}{V=e^x\sin y+h(x)} \xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{مشتق}} V_y=e^x\cos y+h'(x) \\ U_x=V_y \longrightarrow e^x\cos y=e^x\cos y+h'(x) \longrightarrow h'(x)=0 \longrightarrow h(x)=0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{V=e^x\sin y}$

مثال:

آیا تابع $u=x^2-y^2-2x+3y$ تابع همساز است ؟مزدوج همساز آن را درصورت همساز بودن بدست آورید.

$$u=x^2-y^2-2x+3y\begin{cases}U_x=2x-2 \longrightarrow U_{xy}=0\\ U_{xx}=2\\ U_y=-2y+3 \longrightarrow U_{yx}=0\\ U_{yy}=-2\end{cases}$$

$$U_{xx}+U_{yy}=0 \longrightarrow 2+(-2)=0$$

با توجه به اینکه مشتقات جزعی مرحله اول و دوم پیوسته هستند و در معادله لاپلاس صدق میکند تابع همساز است.

$$U_x=V_y\begin{cases}U_x=2x-2 \xrightarrow[\text{نسبت به y}]{\text{انتگرال}} V=2xy-2y+h(x) \xrightarrow[\text{نسبت به x}]{\text{مشتق}} V_x=2y+h'(x)\\ U_y=-V_x \xrightarrow{-U_y=V_x} 2y-3=2y+h'(x) \longrightarrow h'(x)=-3 \longrightarrow h(x)=-3x\end{cases} \longrightarrow \boxed{V=2xy-2y-3x} \qquad V_x=2y-3$$

$$U_y=-V_x\begin{cases}U_y=-2y+3 \xrightarrow{-U_y=V_x} 2y-3 \xrightarrow[\text{نسبت به x}]{\text{انتگرال}} V=2yx-3x+h(y) \xrightarrow[\text{نسبت به y}]{\text{مشتق}} V_y=2x+h'(x)\\ U_x=V_y \longrightarrow 2x+h'(y)=2x-2 \longrightarrow h'(y)=-2 \longrightarrow h(y)=-2y\end{cases} \longrightarrow \boxed{V=2xy-2y-3x}$$

مثال:

آیا تابع $u=x^3-3xy^2$ تابع همساز است ؟مزدوج همساز آن را درصورت همساز بودن بدست آورید.

$$u=x^3-3xy^2\begin{cases}U_x=3x^2-3y^2 \longrightarrow U_{xy}=-6y\\ U_{xx}=6x\\ U_y=-6xy \longrightarrow U_{yx}=-6y\\ U_{yy}=-6x\end{cases}$$

$$U_{xx}+U_{yy}=0 \longrightarrow 6x+(-6x)=0$$

با توجه به اینکه مشتقات جزعی مرحله اول و دوم پیوسته هستند و در معادله لاپلاس صدق میکند تابع همساز است.

$$U_x=V_y\begin{cases}U_x=3x^2-3y^2 \xrightarrow[\text{نسبت به y}]{\text{انتگرال}} V=3x^2y-y^3+h(x) \xrightarrow[\text{نسبت به x}]{\text{مشتق}} V_x=6xy+h'(x)\\ U_y=-V_x \xrightarrow{-U_y=V_x} 6xy=6xy+h'(x) \longrightarrow h'(x)=0 \longrightarrow h(x)=0\end{cases} \longrightarrow \boxed{V=3x^2y-y^3}$$

$$U_y=-V_x\begin{cases}U_y=-6xy \xrightarrow{-U_y=V_x} 6xy \xrightarrow[\text{نسبت به x}]{\text{انتگرال}} V=3x^2y+h(y) \xrightarrow[\text{نسبت به y}]{\text{مشتق}} V_y=3x^2+h'(y)\\ U_x=V_y \longrightarrow 3x^2-3y^2=3x^2+h'(y) \longrightarrow h'(y)=-3y^2 \longrightarrow h(y)=-y^3\end{cases} \longrightarrow \boxed{V=3x^2y-y^3}$$

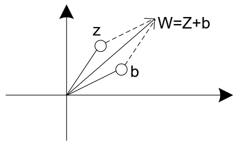
1) تابع همانی:

تابع $f(Z)=Z$ را یک تابع همانی میانمند هرگاه دوصفحه Z , $w=f(Z)=U+iV$ را برهم منطبق بگیریم آنگاه داریم $U=x$, $V=y$.

بدیهیست که این تابع تابع تام بوده و هر شکل را بدون تغییر منتقل میکند ،همدیس بودن آن نیز بدیهی است یعنی هر زاویه با این تبدیل بدون تغییر منتقل میشود.

2) تابع $W=Z+b$:

نظر به اینکه هر عدد مختلط $Z=x+iy$ را میتوان بصورت یک بردار در صفحه مختلط با نقطه آغازی مبداء مختصات و نقطه انتهایی (x,y) تصور نمود مجمع دو عدد مختلط را نیز میتوان از قاعده ای شبیه به جمع بردارها بدست آورد.



بنابراین $W=Z+b$ که تابعی تام است هر شکل را بدون تغییر به اندازه دلخواه b منتقل میکند.

3) توابع خطی:

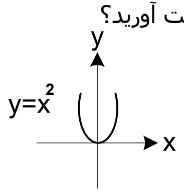
هرگاه تابع بصورت $W=az+b$ که در آن a,b اعداد مختلط هستند به یک تابع خطی موسوم است و هر تابع خطی تابعی تام است.

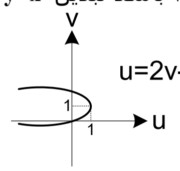
مثال: اگر $w=iz+1+i$ باشد تبدیل $y=x^2$ تحت w را بدست آورید؟

$$W=iz+1+i=i(x+iy)+1+i=ix-y+1+i=\overbrace{1-y}^{u}+i\overbrace{(x+1)}^{v}$$

$$\begin{cases} u=1-y \xrightarrow{y=x^2} u=1-x^2=1-(v-1)^2=1-v^2-1+2v=2v-v^2 \\ v=x+1 \longrightarrow x=v-1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u=1-y \\ v=x+1 \\ \text{معادلات مهم } W=az+b \end{array}}$$





$u=2v-v^2$
$$\begin{cases} v=0 & u=2v-v^2=0 \\ v=2 & u=0 \\ v=3 & u=-3 \\ v=-3 & u=-12 \end{cases}$$

برای رسیدن از Z به W در تبدیل $W=iZ+1+i$ به کمک یک تبدیل خطی نخست انبساط یا انقباضی به اندازه $|a|$ و دورانی به اندازه $\operatorname{Arg} a$ و سپس انتقالی به اندازه b لازم است و چون انبساط و انقباض ،دوران و انتقال زاویه را عوض نمیکند .پس تبدیل خطی تبدیل همدیس است.

$$w=iz+1+i\begin{cases} a=i \longrightarrow i=0+1i \\ \operatorname{Tan}\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{0} \longrightarrow \theta=90^\circ \end{cases} \qquad w=iz+1+i\begin{cases} b=1+i \\ b=(1,1) \end{cases} \qquad w=iz+1+i\begin{cases} |a|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1}=1 \end{cases}$$

قضیه:

هرگاه $w=f(z)=u+iv$ در نقطه Z تحلیلی بوده و $f'(z)\neq 0$ آنگاه $w=f(z)$ در Z تابعی همدیس است.

4) تابع $w=z^2$

تابع $w=z^2$ بصورت $z^2=x^2-y^2+i2xy$ در همه جا تحلیلی است و در هر نقطه به جزء نقطه $z=0$ که مشتق آن برابر صفر است تابعی همدیس است.

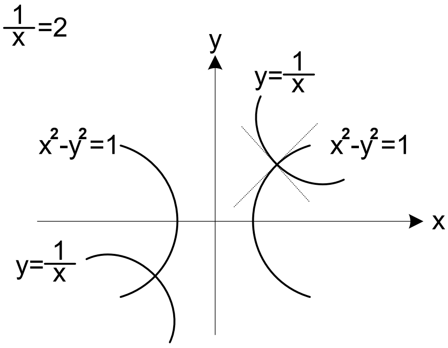
نقاط $z=0,z=1$ با این نگاشت بدون تغییر میماند یا بعبارت دیگر این نقاط را به خودشان بدل میکند ،بدین جهت این نقاط را نقاط ثابت میگویند.در حالت کلی نقاط ثابت $w=f(z)$ از حل معادله $f(z)=z$ بدست می آید.

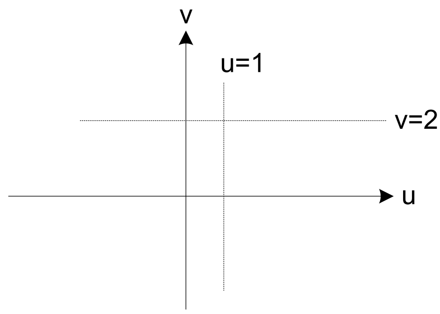
$$w=z^2\begin{cases} z^2=(x+iy)(x+iy)=\underbrace{x^2-y^2}_{u}+i\underbrace{2xy}_{v} \\ f(z)=z \longrightarrow z^2=z \longrightarrow \begin{cases} z=0 \\ z=1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=x^2-y^2 \xrightarrow{x^2-y^2=1} u=1 \\ v=2xy \xrightarrow{y=\frac{1}{x}} v=2x\dfrac{1}{x}=2 \end{cases}$$

دو هذلولی متعامد(عمود برهم) $x^2-y^2=1$ و $y=\dfrac{1}{x}$ به دو خط راست $u=1$ و $v=2$ تبدیل میشود.

$$\boxed{\begin{array}{c} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \\ \text{معادلات مهم } w=z^2 \end{array}}$$





مثال: تبدیل هر یک از منحنیهای زیر را تحت نگاشت $w=z^2$ بدست آورید.؟

الف) $y=-x$ ب) $x=3$ ج) $y=1+x$ د) $y^2=x^2+1$

الف) $\begin{cases} u=x^2-y^2 \xrightarrow{y=-x} u=x^2-(-x)^2 \to u=x^2-x^2 \to u=0 \\ v=2xy \end{cases}$

ب) $\begin{cases} u=x^2-y^2 \xrightarrow{x=3} u=9-y^2 \to y^2=9-u \to y=\sqrt{9-u} \\ v=2xy \to v=2\times 3\sqrt{9-u} \to v=6\sqrt{9-u} \end{cases}$

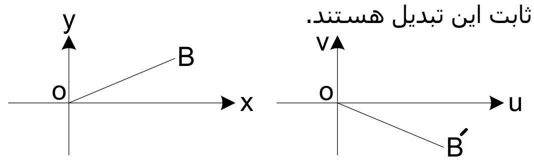
ج) $\begin{cases} u=x^2-y^2 \xrightarrow{y=1+x} u=x^2-(1+x)^2=x^2-(1+x^2+2x)=x^2-1-x^2-2x=-1-2x \to x=\frac{-1-u}{2} \\ v=2xy \to v=2x(1+x)=2x+2x^2 \to =2\left(\frac{-1-u}{2}\right)+2\left(\frac{-1-u}{2}\right)^2=-1-u+\frac{1+2u+u^2}{2}=\frac{-2-2u+1+2u+u^2}{2} \to v=\frac{u^2-1}{2} \to 2v=u^2-1 \end{cases}$ سهمی

د) $\begin{cases} u=x^2-y^2 \xrightarrow{y^2=x^2+1} u=x^2-(x^2+1) \to u=-1 \\ v=2xy \end{cases}$ تبدیل به خط خواهد شد

5) **تابع** $w=\frac{1}{z}$

این تابع در تمام نقاط بجزء $z=0$ تحلیلی است و هر زاویه به راس مبداء مختصات را هم اندازه خود منتقل میکند ،ولی جهت آنرا تغییر میدهد. $z=1,-1$ نقاط ثابت این تبدیل هستند.

$w=\frac{1}{z}\begin{cases} f(z)=z \\ \frac{1}{z}=z \to z^2=1 \begin{cases} z=1 \\ z=-1 \end{cases} \end{cases}$



معادله کلی یک خط راست یا یک دایره در صفحه Z بدین صورت است.

$$\underbrace{a(x^2+y^2)+\overbrace{bx+cy+d}^{\text{خط}}=0}_{\text{دایره}}$$

مزدوج مخرج

$$w=\frac{1}{z} \to z=\frac{1}{w}=\frac{1}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$$

$$\frac{u-iv}{u^2+v^2}\begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2} \\ y=\frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases} \xrightarrow{a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0} \begin{cases} a\left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right)+\frac{bu}{u^2+v^2}-\frac{cv}{u^2+v^2}+d=0 \\ \text{Or} \\ a+bu-cv+d(u^2+v^2)=0 \end{cases}$$

با این تبدیل $w=\frac{1}{z}$ خواهیم داشت.

الف) به ازای $b\neq0$, $a\neq0$ هر دایره غیر مار بر مبداء مختصات را به یک دایره غیر مار بر مبداء مختصات تبدیل میکند.

ب) به ازای $d=0$, $a\neq0$ هر دایره مار بر مبداء مختصات را به یک خط راست غیر مار بر مبداء مختصات تبدیل میکند.

غیر مار برمبداء=از مبداء مختصات نمیگذرد.

ج) به ازای $d\neq0$, $a=0$ هر خط راست غیر مار بر مبداء مختصات را به یک دایره مار بر مبداء مختصات تبدیل میکند.

د) به ازای $d=0$, $a=0$ هر خط راست مار بر مبداء مختصات را به یک خط راست مار بر مبداء مختصات تبدیل میکند.

با این تبدیل خطوط متعامد $y=1,x=1$ به دوایر متعامد تبدیل میشوند.

$$z=\frac{1}{w}\begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2} \xrightarrow{x=1} 1=\frac{u}{u^2+v^2} \to v^2+u^2-u=0 \to v^2+u^2-u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0 \to (u-\frac{1}{2})^2+v^2=\frac{1}{4} \\ y=\frac{-v}{u^2+v^2} \longrightarrow 1=\frac{-v}{u^2+v^2} \to v^2+u^2+v=0 \to v^2+u^2+v+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0 \to (v+\frac{1}{2})^2+u^2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

معادله دایره به مرکز(a,b) و شعاع R

$x=\frac{u}{u^2+v^2}$ $\quad$ $u=\frac{x}{x^2+y^2}$

$y=\frac{-v}{u^2+v^2}$ $\quad$ $v=\frac{-y}{x^2+y^2}$

معادلات مهم $w=\frac{1}{z}$

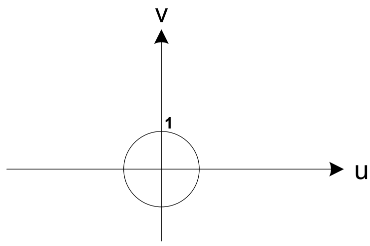
مثال:

دایره $x^2+y^2=1$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به چه منحنی تبدیل میشود؟

$$1)\begin{cases} u=\frac{x}{x^2+y^2} \\ v=\frac{-y}{x^2+y^2}\end{cases} \to \left(\begin{array}{l} u^2=\frac{x^2}{\left[x^2+y^2\right]^2} \\ \quad + \\ v^2=\frac{y^2}{\left[x^2+y^2\right]^2}\end{array}\right) u^2+v^2=\frac{x^2+y^2}{\left[x^2+y^2\right]^2}=\frac{1}{\left[x^2+y^2\right]}\xrightarrow[x^2+y^2=1]{}=\frac{1}{1}=1\to\boxed{u^2+v^2=1}$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\to(u-0)^2+(v-0)^2=1^2$$

$$2)\begin{cases} x=\frac{u}{v^2+u^2} \\ y=\frac{-v}{u^2+v^2}\end{cases} \to \left(\begin{array}{l} x^2=\frac{u^2}{\left[v^2+u^2\right]^2} \\ \quad + \\ y^2=\frac{v^2}{\left[u^2+v^2\right]^2}\end{array}\right) x^2+y^2=\frac{u^2+v^2}{\left[u^2+v^2\right]^2}=\frac{1}{\left[u^2+v^2\right]}\xrightarrow[x^2+y^2=1]{}\boxed{u^2+v^2=1}$$



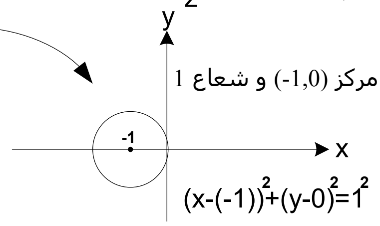
دایره ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع 1

مثال:

منحنی $|Z+1|=1$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به چه منحنی تبدیل میشود؟

$$|z+1|=1\to|x+iy+1|=1\to|x+1+iy|=1\to\sqrt{(x+1)^2+y^2}=1\to(x+1)^2+y^2=1$$

دایره ای به مرکز $(-1,0)$ و شعاع 1



$$(x-(-1))^2+(y-0)^2=1^2$$

$$(x+1)^2+y^2=1\to x^2+2x+1+y=1\to x^2+y^2=-2x$$

$$\begin{cases} u=\frac{x}{x^2+y^2} \\ v=\frac{-y}{x^2+y^2}\end{cases}\xrightarrow{x^2+y^2=-2x}u=\frac{x}{-2x}\to u=-\frac{1}{2}$$

مثال:

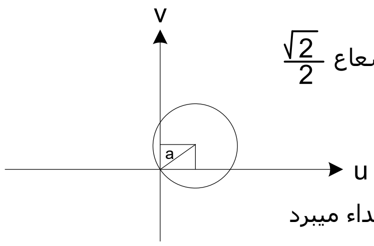
منحنی $y=x-1$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به چه منحنی تبدیل میشود؟

$$y=x-1\xrightarrow[x=\frac{u}{v^2+u^2}]{y=\frac{-v}{u^2+v^2}}\frac{-v}{u^2+v^2}=\frac{u}{v^2+u^2}-1\to\frac{u+v}{u^2+v^2}=1\to u^2+v^2=u+v\to u^2-u+v^2-v=0\to(u^2-u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})+(v^2-v+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})=0$$

$$\to(u^2-u+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}+(v^2-v+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}=0\to(u-\frac{1}{2})^2+(v-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$$

دایره ای به مرکز $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ و شعاع $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$a=\sqrt{(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



خط مار بر مبداء را به دایره مار بر مبداء میبرد

6) **تبدیل دو خطی یا تبدیل خطی کسری موبیوس:** $W=\frac{az+b}{cz+d}$

هر نگاشت بصورت $w=\frac{az+b}{cz+d}$ که در آن $ad-bc=0$ به تبدیل دوخطی (خطی کسری یا موبیوس) مرسوم است.

این تبدیل در همه نقاط به جزء $z=\frac{-d}{c}$ همدیس است.

این تبدیل دارای خاصیت جالبی است و آن خاصیت این است که تنها یک چنین تبدیلی موجود است که سه نقطه Z_1,Z_2,Z_3 از صفحه Z را به ترتیب بر روی سه نقطه W_1,W_2,W_3 از صفحه W می نگارد و این تبدیل را میتوان از روی تساوی زیر بدست آورد.

$$\frac{W-W_1}{W-W_3}\times\frac{W_2-W_3}{W_2-W_1}=\frac{Z-Z_1}{Z-Z_3}\times\frac{Z_2-Z_3}{Z_2-Z_1}$$

معادلات مهم موبیوس

بعنوان نمونه تبدیل موبیوس روبرو نقاط $-1,0,1$ را به ترتیب بر روی نقاط $-1-\frac{i}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{-3+i}{5}$ می نگارد.

$$w=\frac{iz+3}{z-4}\begin{cases} z=1\to w=-1-\frac{i}{3} \\ z=0\to w=-\frac{3}{4} \\ z=-1\to w=\frac{-3+i}{5}\end{cases}$$

مثال:

تبدیل موبیوسی بنویسید که سه نقطه 2,1,0 را برروی 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ بنگارد.

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\times\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\;\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

$$\begin{cases} z_1=0\\ z_2=1\\ z_3=2\\ w_1=1\\ w_2=\frac12\\ w_3=\frac13\end{cases}$$

$$\frac{w-1}{w-\frac13}\times\frac{\frac12-\frac13}{\frac12-1}=\frac{z-0}{z-2}\times\frac{1-2}{1-0}\rightarrow\frac{w-1}{w-\frac13}\times\cancel{-}\frac13=\frac{z-0}{z-2}\times\cancel{-}1\rightarrow\frac{w-1}{\frac{3w-1}{\cancel{3}}}\times\frac{1}{\cancel{3}}=\frac{z}{z-2}\rightarrow\frac{w-1}{3w-1}=\frac{z}{z-2}$$

$$wz-2w-\cancel{z}+2=3wz-\cancel{z}\rightarrow w(z-2-3z)=-2\rightarrow w=\frac{-2}{-2-2z}\rightarrow w=\frac{1}{1+z}$$

7) **نگاشت** $w=\sin z$

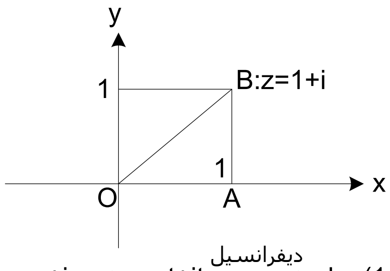
$$w=\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy=\overbrace{\sin x\cosh y}^{u}+i\overbrace{\cos x\sinh y}^{v}$$

مثال $w=\sin z=5\rightarrow Z=\underbrace{2k\pi+\frac{\pi}{2}}_{x}+i\underbrace{\ln(5+2\sqrt{6})}_{y}$

انتگرال گیری از توابع مختلط:

انتگرال روی خط در صفحه مختلط:

مثال: از تابع $w=z^2$ الف)در طول OB ب)در طول OAB انتگرال بگیرید؟



الف) $OB: y=x\xrightarrow{\text{پارامتریک کردن تابع}}y=x=t$ $\quad O\Big|_{0}^{0}\ (t=0)\quad B\Big|_{1}^{1}\ (t=1)$

$$z=x+iy\rightarrow z=t+it\xrightarrow{\text{دیفرانسیل}}dz=(1+i)dt\qquad z^2=(x+iy)(x+iy)=(t+it)(t+it)=t^2+it+it-t^2=2it^2$$

$$\int_{OB\,0}^{1}z^2dz=\int_0^1 2it^2(1+i)dt=2i(1+i)\int_0^1 t^2dt=2i(1+i)\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=2i(1+i)\frac13-0=\frac23 i(i+1)$$

0،1 راانطور بدست میاوریم که بجای t چه عددی بگذاریم تا O,B 0یا 1 شود.

ب) $OAB: OA+AB$ $\quad OA:\begin{cases}y=0\\x=t\end{cases}\ 0\leqslant t\leqslant1\quad AB:\begin{cases}y=t\\x=1\end{cases}\ 0\leqslant t\leqslant1\quad \int_{OAB\,0}^{1}z^2dz=\int_{OA\,0}^{1}z^2dz+\int_{AB\,0}^{1}z^2dz$

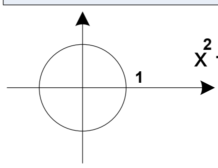
$$z=x+iy=t+(0)=t\qquad z=1+it$$
$$z^2=t^2\qquad z^2=1+2it-t^2$$
$$dz=dt\qquad dz=i.dt$$

$$\int_{OA\,0}^{1}z^2dz=\int_0^1 t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac13\qquad \int_{AB\,0}^{1}z^2dz=\int_{AB\,0}^{1}(1+2it-t^2)idt=\int_0^1(i-2t-it^2)dt=\Big|_0^1(it-t^2-\frac{it^3}{3})=(i-1-\frac{i}{3})-0=\frac{2i}{3}-1$$

$$\int_{OAB\,0}^{1}=\int_{OA\,0}^{1}+\int_{AB\,0}^{1}=\frac13+\frac{2i}{3}-1=-\frac23+\frac{2i}{3}=\frac{2(i-1)}{3}=\frac23 i(i+1)=\int_{OB\,1}^{1}$$

$\boxed{|z|=1\rightarrow x^2+y^2=1\ \text{فرمول دایره یکه}}$

مثال: از تابع $w=\frac{1}{z}$ در طول دایره یکه (دایره به شعاع 1)و در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید؟



$x^2+y^2=1\quad\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant2\pi$

$\boxed{\cos t+i\sin t=e^{it}=z}$ فرمول اویلر $\qquad z=x+iy=\cos t+i\sin t=e^{it}$

$dz=ie^{it}.dt$

$\boxed{\cos t-i\sin t=e^{-it}=\bar z}\rightarrow e^{it}=\cos(-t)+i\sin(-t)=\cos t-i\sin t=x-iy=\bar z$

$$\int_{|z|=1\,0}^{2\pi}\frac1z dz=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{e^{it}}dt=i\int_0^{2\pi}dt=it\Big|_0^{2\pi}=2\pi i$$

$\boxed{y=e^{u}\rightarrow y'=u'e^{u}}$

مثال: از تابع $w=\frac{1}{z^2}$ در طول دایره یکه (دایره به شعاع 1)و در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید؟

$$\int_{|z|=1\,0}^{2\pi}\frac{1}{z^2}dz=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{(e^{it})^2}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{e^{2it}}dt=\underbrace{i\int_0^{2\pi}e^{-it}dt}_{\int e^{kx}dx=\frac1k e^{kx}+c}=i\frac{1}{-i}e^{-it}\Big|_0^{2\pi}=-e^{-it}\Big|_0^{2\pi}=\underbrace{-e^{-2\pi i}}_{\substack{-(\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi))\\-(1+i(0))=-1}}+e^{0}=-1+1=0$$

قضیه $\displaystyle\int_{|z|=1\,0}^{2\pi}\frac{dz}{(z-z_0)^n}\begin{cases}0 & n\neq1\\2\pi i & n=1\end{cases}$

مثال: از تابع $w=\frac{1}{\bar{z}}$ در طول دایره یکه (دایره به شعاع 1)و در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید؟

$$x^2+y^2=1 \quad \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi \quad \cos t-i\sin t=e^{-it}=\bar{z} \longrightarrow d\bar{z}=-ie^{-it}.dt$$

$$\int_{|\bar{z}|=1} \int_0^{2\pi}\frac{1}{\bar{z}}\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{-ie^{it}}{e^{-it}}dt=\int_0^{2\pi}-idt=-i\int_0^{2\pi}dt=-it\Big|_0^{2\pi}=-2\pi i$$

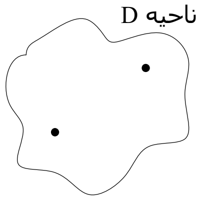
مثال: از تابع $w=\frac{1}{\bar{z}^2}$ در طول دایره یکه (دایره به شعاع 1)و در جهت مثلثاتی انتگرال بگیرید؟

$$\int_{|\bar{z}|=1} \int_0^{2\pi}\frac{1}{\bar{z}^2}\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{-ie^{it}}{(e^{-it})^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{-i}{e^{-it}}\,dt=\int_0^{2\pi}-ie^{it}dt=-i\,\frac{1}{i}\,e^{it}\Big|_0^{2\pi}=-e^{it}\Big|_0^{2\pi}=-e^{2\pi i}-e^{0}=0$$

$$\underbrace{\underbrace{-(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi))}_{-(1+i(0))=-1}+\underbrace{(\cos(0)+i\sin(0))}_{(1+i(0))=1}}_{-1+1=0}$$

قضیه: هرگاه f(z) برناحیه کراندار(تابعی که بین دو عدد باشد)،همبند ساده D تحلیلی وf (z) پیوسته باشد آنگاه به ازای هر مسیر بسته c واقع بر D ، $\oint_c f(z)dz=0$ در آن انتگرال گیری بر روی منحنی بسته c در جهت مثلثاتی است.

ناحیه D

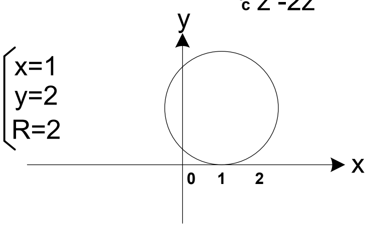


همبند :اگر دونقطه در ناحیه D را فرض کنیم بتوان با منحنیهای شکسته بهم وصل نمود.

مثال: $\oint_c \frac{z+1}{z^3-2z^2}$ را حساب کنید C دایره ای است به معادله $|z-1-2i|=2$

$$z^3-2z^2=0 \begin{cases} z=0 \\ z=2 \end{cases}$$ در این نقاط تحلیلی نیست

$$|z-1-2i|=2 \to |x+iy-1-2i|=2 \to |(x-1)+i(y-2)|=2 \to \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=2 \to (x-1)^2+(y-2)^2=4 \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ R=2 \end{cases}$$



قضیه:(فرمول انتگرال کشی)

فرض کنید f(z)بر ناحیه همبند ساده D تحلیلی و C یک منحنی بسته واقع در D و Z_0 نقطه ای در درون C باشد آنگاه داریم

$$\boxed{\oint \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=2\pi i.f(z_0)}$$

مثال: $\oint_c \frac{dz}{z}$ روی هر مسیر بسته ساده که شامل مبداء باشد برابر $2\pi i$ است

$$\begin{cases} f(z)=1 \longrightarrow f(z_0)=1 \\ z_0=0 \end{cases} \qquad [f(x)=2 \to f(0)=2 \to f(10)=2$$

$$\oint_c \frac{dz}{z-z_0}=2\pi\, i\times 1=2\pi\, i$$

مثال: انتگرال$\oint_c \frac{e^z}{z}dz$ را محاسبه کنید C عبارت است از دایره $|Z|=2$

$$\begin{cases} f(z)=e^z \longrightarrow f(z_0)=1 \\ z_0=0 \end{cases}$$

$$\oint_c \frac{e^z}{z}dz=2\pi\, i\times 1=2\pi\, i$$

مثال: از تابع $f(z)=\frac{z^2+2}{z(z^2-2)}$ بر روی دایره یکه انتگرال بگیرید.

$$\oint_{|Z|=1}\frac{z^2+2}{z(z^2-2)}\,dz=\frac{\frac{z^2+2}{(z^2-2)}}{z}\,dz=2\pi i\,\frac{0^2+2}{(0^2-2)}=-2\pi i$$

هر دایره ای میتواند باشد.

قضیه جامع: فرض کنید $f(z)$ بر ناحیه همبند ساده D تحلیلی و C یک منحنی بسته واقع در D و Z_0 نقطه ای در درون C باشد آنگاه داریم

$f^{(n)}=$ n مشتق مرتبه

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}.f^{(n)}(z_0)$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle n=1}$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{2}}dz=2\pi i.f'(z_0)$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle n=0}$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz=2\pi i.f(z_0)$$

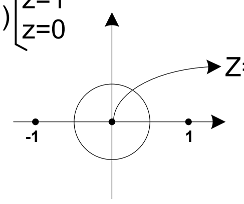
مثال: انتگرال $\oint_c \frac{3z+1}{z^3-z^2}dz$ را محاسبه کنید .الف) $C=|Z|=\frac{1}{2}$ ب) $C=|Z|=2$

$$z^3-z^2=z^2(z-1)\begin{cases}z=1\\z=0\end{cases}$$

چون به یک ریشه Z داخل دایره میرسیم میتوانیم از طریق فرمول مسئله را حل کنیم $\rightarrow Z=0$

الف)

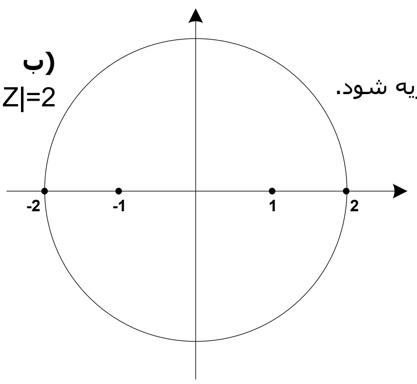
$Z=\frac{1}{2}$



$$\oint_c \frac{3z+1}{z^3-z^2}dz=\oint_c \frac{3z+1}{z^2(z-1)}dz=\oint_c \frac{\frac{3z+1}{z-1}}{z^2}dz\xrightarrow[z_0=0\quad n=1]{f(z)=\frac{3z+1}{z-1}}=2\pi i\left[\frac{3(z-1)-(3z+1)}{(z-1)^2}\right]_{z=0}=-8\pi i$$

ب)

$|Z|=2$



چون هر دو ریشه داخل دایره است باید تابع تجزیه شود.

$$\frac{3z+1}{z^2(z-1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{(z-1)}=\frac{Az(z-1)+B(z-1)+Cz^2}{z^2(z-1)}=\frac{Az^2-Az+Bz-B+Cz^2}{z^2(z-1)}$$

$$=\frac{\overbrace{z^2(A+C)+z(B-A)-B}^{3z+1}}{z^2(z-1)}\begin{cases}A+C=0\longrightarrow C=4\\B-A=3\longrightarrow A=-4\\B=-1\end{cases}\qquad \frac{3z+1}{z^2(z-1)}=\frac{-4}{z}+\frac{-1}{z^2}+\frac{4}{(z-1)}$$

$$\oint_{|z|=2}\frac{-4}{z}dz+\oint_{|z|=2}\frac{-1}{z^2}dz+\oint_{|z|=2}\frac{4}{z-1}dz=2\pi i(-4)+2\pi i(0)+2\pi i(4)=0$$

مثال: انتگرال $\oint_{|Z|=1}\frac{\text{Cos } z}{z^3}dz$ را محاسبه کنید .

$$\oint_{|Z|=1}\frac{\text{Cos } z}{z^3}dz\xrightarrow[n=2\quad Z_0=0]{f(z)=\text{Cos } z}=\frac{2\pi i}{2!}f''(0)=-\pi i$$

$f'(z)=-\text{Sin } z$

$f''(z)=-\text{Cos } z$

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i.\underset{z=z_0}{\text{Res}}\,f(z)\qquad C_{-1}=\underset{z=z_0}{\text{Res}}\,f(z)=\frac{1}{z}\text{ ضریب}$$

$$\oint\frac{\text{Cos } z}{z^3}dz\longrightarrow\frac{\text{Cos } z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\text{Cos } z=\frac{1}{z^3}\left[1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right]=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2z}+\frac{z}{4!}-\ldots=2\pi i\,\frac{-1}{2}=-\pi i$$

بسط مک لرن

$$\text{Cos } z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots$$

$$\text{Sin } z=0+z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots$$

$$\int_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz \longrightarrow z^2\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots\right]=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!\,z}+\dots=2\pi i\,\frac{1}{6}=\frac{\pi i}{3}$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots \qquad x=\frac{1}{z}$$

مثالهایی که بیش از یک نقطه درون Z باشد.

قضیه مانده ها:

هرگاه $f(z)$ بر مرز ساده و بسته C تحلیلی ودر درون آن به جزء در نقاط $Z_1Z_2\dots Z_k$ تحلیلی باشد آنگاه

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{z=z_k,\,k=1,2,\dots n}\operatorname{Res} f(z)$$

$$C_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m.f(z)\right]$$

توان مخرج

مشتق بر پایه m-1

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m.f(z)\right]=\left[(z-z_0)^m.f(z)\right]^{f(m-1)}$$

$$z^2(z-1)=0\begin{cases}Z=0\\Z=1\end{cases}$$

$$\oint_{\substack{C\\|z|=2}}\frac{3z+1}{z^2(z-1)}dz=2\pi i\,\overbrace{(\operatorname*{Res}_{\substack{Z=0\\m=2\\z^2}} f(z)+\operatorname*{Res}_{\substack{Z=1\\m=1\\(z-1)}} f(z))}^{\sum\operatorname{Res} f(z)}=2\pi i(\operatorname*{Res}_{\substack{Z=0\\m=2}}\frac{3z+1}{z^2(z-1)}+\operatorname*{Res}_{\substack{Z=1\\m=1}}\frac{3z+1}{z^2(z-1)})$$

$$=2\pi i(\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left[\cancel{(z-0)^2}\frac{3z+1}{\cancel{z^2}(z-1)}\right]'+\frac{1}{(1-1)!}\lim_{z\to 1}\left[\cancel{(z-1)}\frac{3z+1}{z^2\cancel{(z-1)}}\right])=2\pi i(\frac{3(z-1)-1(3z+1)}{(z-1)^2}\bigg|_{z=0}+\frac{4}{1})=2\pi i(-4+4)=0$$

$$z(z-1)=0\begin{cases}Z=0\\Z=-1\end{cases}$$

$$\oint_{\substack{C\\|z|=2}}\frac{z^2+1}{z(z+1)}dz=2\pi i(\operatorname*{Res}_{\substack{Z=0\\m=1}} f(z)+\operatorname*{Res}_{\substack{Z=-1\\m=1}} f(z))=2\pi i(\lim_{z\to 0}\cancel{(z-0)}\frac{z^2+1}{\cancel{z}(z+1)}+\lim_{z\to -1}\cancel{(z+1)}\frac{z^2+1}{z\cancel{(z+1)}})=2\pi i(1-2)=-2\pi i$$

اگر فقط باقیمانده ها را بخواهند فقط قسمت بعد از $2\pi i$ را محاسبه میکنیم که ذر مثال بالا 1 و -2 میباشد.

راه حل میانبر $\oint_{|z|=2}\frac{z^2+1}{z(z+1)}$

$$Z=0:\quad \frac{z^2+1}{z(z+1)}\xrightarrow[Z=0]{\text{حذف } Z \text{ از مخرج}}\frac{z^2+1}{(z+1)}=1$$

$$Z=-1:\quad \frac{z^2+1}{z(z+1)}\xrightarrow[Z=-1]{\text{حذف } Z+1 \text{ از مخرج}}\frac{z^2+1}{z}=-2$$

$$=2\pi i(1-2)=-2\pi i$$

$$z(z-1)=0\begin{cases}Z=0\\Z=-1\end{cases}$$

مانده تابع $\frac{z^2+1}{z^2+4}$ را بدست آورید؟

$z^2+4=0 \to (z-2i)(z+2i)=0 \begin{cases} Z=2i \\ Z=-2i \end{cases}$ Or $z^2+4=0 \to Z=\frac{-b(+-)\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(+-)\sqrt{-16}}{2}\begin{cases} Z=2i \\ Z=-2i \end{cases}$ ریشه های مخرج

$$\underset{\substack{Z=2i\\m=1}}{\text{Res}}\, f(z) + \underset{\substack{Z=-2i\\m=1}}{\text{Res}}\, f(z) \to \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z^2+1}{z^2+4} + \lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{z^2+1}{z^2+4} = \lim_{z\to 2i}\cancel{(z-2i)}\frac{z^2+1}{\cancel{(z-2i)}(z+2i)} + \lim_{z\to -2i}\cancel{(z+2i)}\frac{z^2+1}{(z-2i)\cancel{(z+2i)}}$$

$$=\frac{-3}{4i}+\frac{-3}{-4i} \xrightarrow[\text{و مخرج در i}]{\text{ضرب صورت}} = \frac{-3i}{-4}+\frac{-3i}{4} = i\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)=0$$

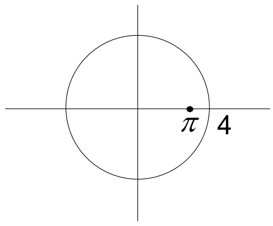
مانده تابع $\oint_{|z|=4}\frac{\text{Cos } z}{z(z-\pi)^2}$ را بدست آورید؟

$\begin{cases} Z=0 \\ Z=\pi \end{cases}$ ریشه های مخرج

$$2\pi i\left(\underset{\substack{Z=0\\m=1}}{\text{Res}}\, f(z)+\underset{\substack{Z=\pi\\m=2}}{\text{Res}}\, f(z)\right)=2\pi i\left(\underset{\substack{Z=0\\m=1}}{\text{Res}}\frac{\text{Cos } z}{z(z-\pi)^2}+\underset{\substack{Z=\pi\\m=2}}{\text{Res}}\frac{\text{Cos } z}{z(z-\pi)^2}\right)=2\pi i\left(\lim_{z\to 0}\cancel{(z-0)}\frac{\text{Cos } z}{\cancel{z}(z-\pi)^2}+\lim_{z\to\pi}\left[\cancel{(z-\pi)^2}\frac{\text{Cos } z}{z\cancel{(z-\pi)^2}}\right]'\right)$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{\pi^2}+\lim_{z\to\pi}\frac{(-\sin z)z-\cos z}{z^2}\right)=2\pi i\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\right)=\frac{4i}{\pi}$$

$|z|=4 \to \sqrt{x^2+y^2}=4 \qquad x^2+y^2=4^2$



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$x = x^2$, $x = -x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \ldots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n)!}$$

$$(e^x)^2 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \ldots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n)!}$$

$$S = \frac{1}{1-q}$$

$x = x^2$, $x = -x$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\text{انتگرال}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = Ln\,(1-x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \xrightarrow{\text{انتگرال}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = Ln\,(1+x)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = Ln\,(1+x^2) = (\arctan x)$$

$(\arctan x)'$

فرمولهای انتگرال گیری ⟺ فرمولهای مشتق گیری

فرمولهای انتگرال گیری

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = Ln|x| + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int (1+\tan^2 x)\, dx = \tan x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\,x + c$

8) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{Arctan}\,x + c$

9) $\int (1+\cot^2 x)\, dx = -\cot x + c$

فرمولهای مشتق گیری

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -(1+\cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(n^x)' = n^x \log_e a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x \log_e a}$$

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arc}\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$(\sqrt[n]{x^m})' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$