گزاره:

گزاره جمله ایست خبری که یا درست است یا نادرست، ضمنا شاید از درستی یا نادرستی آن خبر نداشته باشیم

عدد 7 فرد است (گزاره درست)

علی آدم خوبی است (گزاره نیست چون خوب بودن نسبی است)

شیراز پایتخت ایران است (گزاره نادرست)

صدمین رقم اعشاری $\sqrt{2}$ صفر است (گزاره است ولی از درستی یا نادرستی آن خبر نداریم)

حال شما چطور است ؟ (گزاره نیست)

$i<3$ گزاره درست.

$\wedge$ و

$\vee$ یا

$\rightarrow$ آنگاه

$\leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر)-(شرط لازم و کافی)

ترکیب عطفی $p\wedge q$

ترکیب فصلی $p\vee q$

ترکیب شرطی $p\rightarrow q$

ترکیب دوشرطی $p\leftrightarrow q$

نقیض p $\neg p$

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

$\underbrace{\text{2 فرد است}}_{p\ (F)}$ و $\underbrace{\text{3 زوج نیست}}_{q\ (T)}$ $\quad p\wedge q=F$

$7\leqslant 7$ $\quad (7<7)\vee(7=7)$, $F\vee T=T$

اگر 2 فرد باشد آنگاه 3 فرد نیست. $F\rightarrow F=T$

2 فرد است شرط لازم و کافی است برای آنکه 3 فرد باشد.

$p\leftrightarrow q$, $F\leftrightarrow T=F$

ترتیب اولویتها از چپ به راست

ترکیب دوشرطی , ترکیب شرطی , ترکیب فصلی , ترکیب عطفی , نقیض , پرانتز

$\boxed{(\ \neg\ \wedge\ \vee \rightarrow \leftrightarrow}$

$\rightarrow$

گزاره همیشه نادرست Contradiction

گزاره ای گه ارزش کلی آن نادرست است

$p\wedge\neg p$

p	$\neg p$	$p\wedge\neg p$
T	F	F
F	T	F

گزاره همیشه درست Tautology

گزاره ای گه ارزش کلی آن درست است

$p\vee\neg p$ $\quad p\vee q\leftrightarrow q\vee p$

p	$\neg p$	$p\vee\neg p$
T	F	T
F	T	T

نماد هم ارزی

$\equiv$ $\Leftrightarrow$

گزاره $p\equiv q$ هرگاه p و q هم ارزش باشند.

p طرف اول هم ارزی

q طرف دوم هم ارزی

p	q	$p\rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q\rightarrow\neg p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

$p\rightarrow q\equiv\neg q\rightarrow\neg p$

گزاره های هم ارز مهم

1) $p\wedge p\Leftrightarrow p$ 2) $p\vee p\Leftrightarrow p$ قانون خود نمایی

3) $p\vee q\Leftrightarrow q\vee p$ 4) $p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$ قانون جابجایی

5) $\neg(\neg p)\Leftrightarrow p$

6) $p\rightarrow q\Leftrightarrow\neg p\vee q$

7) $p\rightarrow q\Leftrightarrow\neg q\rightarrow\neg p$

8) $(p\wedge q)\wedge s\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge s)$ 9) $(p\vee q)\vee s\Leftrightarrow p\vee(q\vee s)$ قانون شرکت پذیری

10) $p\wedge(q\vee s)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge s)$ 11) $p\vee(q\wedge s)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee s)$ قانون توزیع پذیری

12) $p\leftrightarrow q\Leftrightarrow(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$

13) $\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q$ 14) $\neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$ قوانین دمرگان

15) $p\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow p$ 16) $p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p$ قوانین جذب

17) $p\vee T\Leftrightarrow T$ 18) $p\wedge F\Leftrightarrow F$ 19) $p\wedge T\Leftrightarrow p$ 20) $p\vee F\Leftrightarrow p$

11) $p \vee (q \wedge s) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee s)$

p	q	s	$q \wedge s$	$p \vee (q \wedge s)$	$(p \vee q)$	$(p \vee s)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee s)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

12) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

10) $p \wedge (q \vee s) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge s)$

p	q	s	$q \vee s$	$p \wedge (q \vee s)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge s)$	$(p \vee q) \vee (p \vee s)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

8) $(p \wedge q) \wedge s \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge s)$

p	q	s	$q \wedge s$	$p \wedge (q \wedge s)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge s$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

7) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

9) $p \vee (q \vee s) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee s$

p	q	s	$q \vee s$	$p \vee (q \vee s)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee s$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	F	F	F	F

13) $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg (p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

16) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

15) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$p \vee (p \wedge q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

14) $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg (p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

6) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

قانون همزادی یا دوگانگی

دو گزاره A و A^* را همزاد یکدیگر گویند اگر بتوانیم یکی را با جایگزینی $\vee$ با $\wedge$ و $\wedge$ با $\vee$ و T با F و F با T بدست آوریم.

$$\underbrace{p\vee(q\wedge s)}_{A}\xrightarrow{\text{همزاد}}\underbrace{p\wedge(q\vee s)}_{A^*}\qquad \neg A\Leftrightarrow A^*$$

استلزام منطقی

فرمول p را مستلزم فرمول q گویندو آنرا با نماد $p\Rightarrow q$ نشان میدهنداگر گزاره شرطی $p\to q$ همیشه درست باشد.

$$p\Rightarrow q\longrightarrow\underbrace{p\to q}_{T}$$

$$(p\to q)\wedge(q\to s)\Rightarrow p\to s$$

p	q	s	$(p\to q)$	$(q\to s)$	$(p\to q)\wedge(q\to s)$	$(p\to s)$	$[(p\to q)\wedge(q\to s)]\to(p\to s)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

$$\overbrace{(p\vee q)\wedge(p\to s)\wedge(q\to s)}^{R}\Rightarrow s$$

p	q	s	$(p\vee q)$	$(p\to s)$	$(q\to s)$	$(p\vee q)\wedge(p\to s)\wedge(q\to s)$	s	$R\to s$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T	F	F	T

پیونددهنده XOR

XOR که آنرا با نماد ∇ یا $\oplus$ نمایش میدهیم ،وقتی درست است که فقط یکی از مولفه ها درست باشد.

p	q	$p\nabla q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$$p\nabla q\Leftrightarrow\neg(p\leftrightarrow q)$$

$$p\nabla q\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$$

مجموعه های کامل

مجموعه ای از پیونددهنده ها که هم ارز هر فرمولی را بتوان با بکار بردن این پیوند دهنده ها نشان داد.

$$\{\neg,\vee\}\quad\{\neg,\wedge\}\quad\{\uparrow\}\quad\{\downarrow\}$$

پیونددهنده Not Or:NOR

p	q	$p\downarrow q$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$$p\downarrow q\Leftrightarrow\neg(p\vee q)$$

پیونددهنده Not And:NAND

p	q	$p\uparrow q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

$$p\uparrow q\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)$$

زیر مجموعه

$A\subset B \Rightarrow \forall x\in A \rightarrow x\in B$

$N\subset Z\subset Q\subset R$

زیر مجموعه کامل

$A\subseteq B \Rightarrow A\subset B \vee A=B$

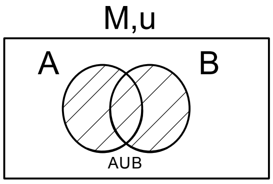
مجموعه جهانی u,M

مجموعه ای که هر مجموعه دیگر زیر مجموعه آن باشد.

$\phi\subset A\subset u$

$A\subset B \wedge B\subset C \Rightarrow A\subset C$

$A\subset B \wedge B\subset A \Rightarrow A=B$

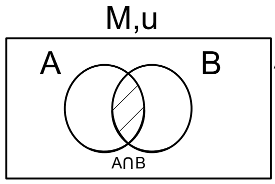


اجتماع

$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ or } x\in B\}$

$A\subseteq A\cup B$

$B\subseteq A\cup B$

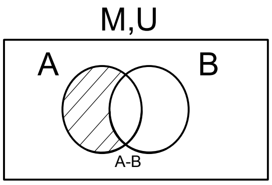


اشتراک

$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ and } x\in B\}$

$A\cap B\subseteq A$

$A\cap B\subseteq B$



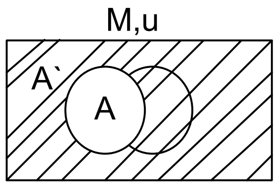
متمم نسبی

$A-B=\{x \mid x\in A \text{ and } x\notin B\}$

$A-B\subseteq A$

$B-A\subseteq B$

$(A-B)\cap(B-A)=\phi$

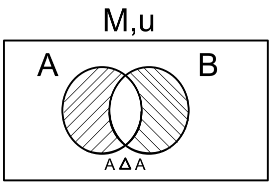


متمم مطلق

$A`=\{x\in M \mid x\notin A\}$

$A\cup A`=M$

$A\cap B`=A-B \quad A`=\sim A$



تفاضل متقارن

$A+B=(A-B)\cup(B-A)$

$A+B=(A\cup B)-(A\cap B)$

حاصلضرب کارتزین

$A\times B=\{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$

دارای خاصیت جابجایی و شرکت پذیری نمیباشد.

$A\times B\neq B\times A$

$A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$

$\left.\begin{array}{r} A=\{1,2,3\} \\ B=\{a,b\} \end{array}\right\} A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

$\left\{\begin{array}{l} \sim A=M-A \\ \sim M=\phi \\ A+A=\phi \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l} \sim(\sim A)=A \\ A\cup\sim A=M \\ A+B=B+A \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l} \sim\phi=M \\ A\cap\sim A=\phi \\ A+\phi=A \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l} A\cup(A\cap B)=A \\ A\cap(A\cup B)=A \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l} A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} A-B=A\cap\sim B \\ A-B=A-(A\cap B) \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l} A\subset B \Rightarrow A\cup B=B \\ A\subset B \Rightarrow A\cap B=A \\ A\subset B \Rightarrow \sim B\subset\sim A \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l} \sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B \\ \sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B \end{array}\right.$

قوانین دمرگان

$\left\{\begin{array}{l} (\phi\cup A)\cap(B\cup A)=A \\ (M\cap A)\cup(B\cap A)=A \end{array}\right.$

اصل دوگان ← دوگان E را با E^* نمایش میدهند که با تعویض $\cup$ با $\cap$ و ϕ با M بدست می آید و بالعکس.

$$\left\{\begin{array}{l} n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C) \\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \\ n(A\times B)=n(A)\times n(B) \end{array}\right.$$

$A=\{1,2,\{1,2\},3\}$ $P(A)=2^4=16$ تعداد زیر مجموعه

عدد بدون { } نمیتواند زیر مجموعه باشد.

$P(A)=\{1\}\ \{2\}\ \{\{1,2\}\}\ \{3\}\ \{1,2\}\ \{1,\{1,2\}\}\ \{1,3\}\ \{2,\{1,2\}\}\ \{2,3\}\ \{\{1,2\},3\}\ \{1,2,\{1,2\}\}\ \{1,2,3\}\ \{1,\{1,2\},3\}$
$\{2,\{1,2\},3\}\ \{\ \}\ \{1,2,\{1,2\},3\}$

---

1) $1\in A$ T 2) $1\subseteq A$ F 3) $\{1\}\in A$ F 4) $\{1\}\subseteq A$ T 5) $\{1,2\}\in A$ T 6) $\{1,2\}\subseteq A$ T 7) $\{1,3\}\in A$ F

8) $\{1,3\}\subseteq A$ T 9) $\{\{1,2\}\}\in A$ F 10) $\{\{1,2\}\}\subseteq A$ T 11) $\phi\in A$ T 12) $\phi\subseteq A$ T 13) $\phi\in P(A)$ T

$\phi\in\phi$ F $\phi\subseteq\phi$ T $\phi\in\{\phi\}$ T $\phi\subseteq\{\phi\}$ T $\phi=\{\phi\}$

مجموعه های جدا از هم (منفصل):

دو مجموعه که اشتراکشان تهی باشد جدا از هم نامیده میشوند.

مجموعه منفصل:

اگر اعضای یک مجموعه همگی مجموعه بوده و دو به دو منفصل باشند.

مثال زوج مرتب $(\{2,x+y\},x)=(\{1,2\},\frac{1}{2}) \longrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x+y=1 \longrightarrow y=\frac{1}{2} \end{cases}$

تعریف رابطه:

R را یک رابطه از **A×B** گویند هرگاه $R\subseteq A\times B$

R هر زیر مجموعه از **A ×B**

$\begin{cases} A=\{1,2,3\} \\ B=\{a,b\} \end{cases}$ $A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ $\begin{cases} R_1=\{(1,a),(2,b)\} \\ R_2=\{(1,a)\} \\ R_3=\{(1,b),(2,a),(3,b)\} \end{cases}$ تعداد رابطه ها $=2^6$

دامنه و برد یک رابطه:

مجموع مولفه های اول یک رابطه را دامنه رابطه و مجموع مولفه های دوم رابطه را برد رابطه گویند.

$\begin{cases} D_{R_1}=\{1,2\} \\ R_{R_1}=\{a,b\} \end{cases}$ $\begin{cases} D_{R_2}=\{1\} \\ R_{R_2}=\{a\} \end{cases}$ $\begin{cases} D_{R_3}=\{1,2,3\} \\ R_{R_3}=\{a,b\} \longrightarrow \end{cases}$ در مجموعه تکرار عضو مجاز نیست.

وارون یک رابطه:

فرض کنیم **R** یک رابطه از **A×B** باشد .وارون **R** را با R^{-1} نشان میدهیم.

$R^{-1}=\{(x,y)|(y,x)\in R\}$

$\begin{cases} R_1^{-1}=\{(a,1),(b,2)\} \\ R_2^{-1}=\{(a,1)\} \\ R_3^{-1}=\{(b,1),(a,2),(b,3)\} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{matrix} D_{R_1}=R_{R_1^{-1}} \\ R_{R_1}=D_{R_1^{-1}} \end{matrix}}$$

تذکر:

یک رابطه از **A ×A** رایک رابطه روی **A** میگوییم. $A\subseteq A\times A$

نامگذاری:

فرض کنیم **R** یک رابطه از **A ×B** باشد .اگر **(a,b)∈R** در اینصورت میگوییم **a** با **b** رابطه **R** دارد و آنرا بصورت **aRb** نمایش میدهیم.

$\begin{cases} (a,b)\in R \longrightarrow aRb \\ (a,b)\notin R \longrightarrow a\not{R}b \end{cases}$ $A=\{(1,2)\}$ $A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$R_1=\{(1,1)\}$ A برروی $A\times A$ یک رابطه از

رابطه همانی:

فرض کنیم **A** یک مجموعه ناتهی است رابطه همانی در **A** که با نماد i_A نمایش داده میشود بصورت زیر تعریف میشود.

$$i_A=\{(x,x)|x\in A\} \longrightarrow i_A=xRx$$

$$A=\{1,2,3\} \longrightarrow i_A=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

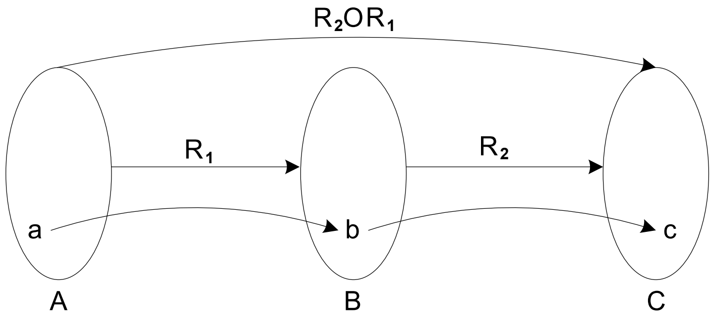
ترکیب دو رابطه:

$\begin{cases} \text{فرض } R_1\subseteq A\times B \\ \text{فرض } R_2\subseteq B\times C \end{cases} \longrightarrow R_2OR_1\subseteq A\times C$

رابطه $\begin{cases} a\,R_1\,b \\ b\,R_2\,c \end{cases} \longrightarrow a(R_2O\,R_1)c$

$\begin{cases} (a,b)\in R_1 \\ (b,c)\in R_2 \end{cases} \longrightarrow (a,c)\in R_2O\,R_1$

b ای در **B** باشد.



برای بدست آوردن عضوهای $R_2O\ R_1$ یک زوج مرتب (x,y) در R_1 اختیار میکنیم اگر زوج مرتبی به شکل (y,z) در R_2 باشد.آنگاه (x,z) عضوی از $R_2O\ R_1$ است.

مثال $\begin{cases} R=\{(4,4),(4,7),(4,9),(6,7),(6,9)\} \\ S=\{(2,4),(2,6),(2,18),(3,18),(9,18)\} \end{cases}$

$\nearrow ROS=\{(2,4),(2,7),(2,9),\cancel{(2,7)},\cancel{(2,9)}\}=\{(2,4),(2,7),(2,9)\}$

$\searrow SOR=\{(4,18),(6,18)\}$

ترکیب یک رابطه با خودش:

$R^1=R \qquad R^2=ROR \qquad R^3=R^2OR \quad \dots\dots$

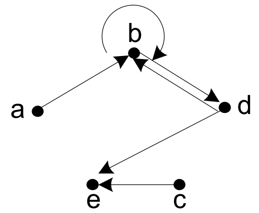
مثال $R=\{(1,1),(3,1),(2,3),(4,2)\} \longrightarrow \begin{cases} R^2=ROR=\{(1,1),(3,1),(2,1),(4,3)\} \\ R^3=R^2OR=\{(1,1),((3,1),(2,1),(4,1)\} \end{cases}$

نمایش یک رابطه با یک گراف جهت دار:

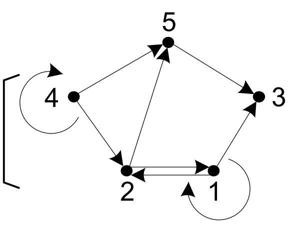
فرض $\begin{cases} \text{A یک مجموعه متناهی} \\ R\subseteq A \quad \text{R یک رابطه بر روی A} \end{cases}$

اگر $\begin{cases} (x,y)\in R \xrightarrow{xRy} \text{x را با پیکان به y متصل میکنیم.} \\ (x,x)\in R \xrightarrow{xRx} \text{x را با یک لوپ به خودش وصل میکنیم.} \end{cases}$

مثال $\begin{bmatrix} A=\{a,b,c,d,e\} \\ R=\{(a,b),(b,b),(b,d),(c,e),(d,b),(d,e)\} \end{bmatrix} \longrightarrow$



مثال

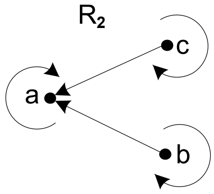


$\longrightarrow R=\{(5,3),(1,3),(1,1),(1,2),(2,1),(2,5),(4,2),(4,4),(4,5)\}$

گرافهای جهتدار اجتماع،اشتراک،متمم،وارون:

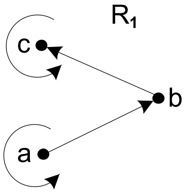
مثال

R_2



$A=\{a,b,c\}$

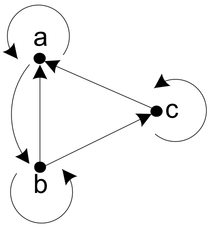
R_1



$R_2=\{(c,c),(a,a),(b,b),(b,a),(c,a)\}$

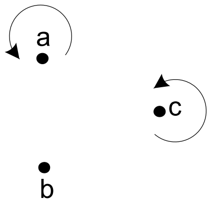
$R_1=\{(c,c),(a,a),(a,b),(b,c)\}$

$R_1 \cup R_2$



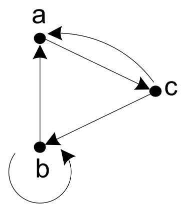
$R_1 \cup R_2$
$=\{(c,c),(a,a),(b,b),(b,a)$
$,(c,a),(a,b),(b,c)\}$

$R_1 \cap R_2$



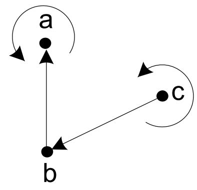
$R_1 \cap R_2=\{(c,c),(a,a)\}$

R_1^c



R_1^c
$=\{(b,b),(b,a),(c,b),$
$(a,c),(c,a)\}$

R_1^{-1}



$R_1^{-1}=$
$\{(c,c),(a,a),(b,a),$
$(c,b)\}$

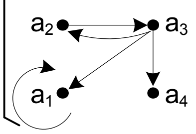
استفاده از ماتریسها برای نمایش رابطه ها:

فرض: R یک رابطه بر روی A $R \subseteq A$

$A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$

$\xrightarrow[\text{ماتریس مرجع}]{M_R=[m_{ij}]_{n\times n}} m_{ij}=\begin{cases}1 & ,(a_i,a_j)\in R\\ 0 & ,(a_i,a_j)\in R\end{cases}$

مثال: $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$



ماتریس متناظر رابطه

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ \hline a_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ a_2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ a_3 & 1 & 1 & 0 & 1\\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

ماتریس صفر و یک:

ماتریسی که درایه هایش تنها از صفر و یک تشکیل شده است.

رابطه انعکاسی:

1) $\forall x\in A,(x,x)\in R$ ← یعنی گراف جهت دار R در هر راس دارای یک لوپ باشد.

$i_A \subseteq R$

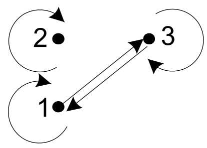
2) رابطه R انعکاسی است هرگاه همه درایه های روی قطر اصلی ماتریس متناظر ، 1 باشد.

مثال: $A=\{1,2,3\}$

اگر $\forall x,y\in A \mid (x,y)\in R$ x+y زوج باشد.

$\longrightarrow R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1),(1,3)\}$

رابطه انعکاسی است.

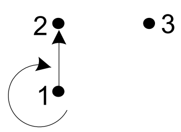


$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3\\ \hline 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 1\end{array}$$

مثال: $A=\{1,2,3\}$

$R=\{(1,1),(1,2)\}$

$\longrightarrow$ رابطه انعکاسی نیست.



$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3\\ \hline 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

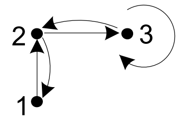
رابطه متقارن:

1) $\forall x,y\in R \longrightarrow (y,x)\in R$

یعنی اگر از راس a به b یک یال جهت دار وجود داشته باشد آنگاه ازراس b به a نیز پیکان جهت دار وجود داشته باشد.

2) رابطه R متقارن است هرگاه ماتریس متناظر این رابطه نسبت به قطر اصلی متقارن باشد

مثال $R=\{(1,2),(2,1),(3,3),(2,3),(3,2)\} \longrightarrow$



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

رابطه متقارن است.

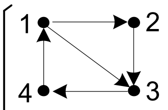
رابطه ترایایی (تعدی ،انتقالی):

1) اگر $(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \longrightarrow (a,c)\in R$

یعنی اگر از a به b یک یال جهت دار باشد و از b به c نیز یک یال جهتدار باشد ،آنگاه از a به c نیز یک یال جهت دار وجود داشته باشد.

2) رابطه R ترایایی است هرگاه درایه های (i,j) ام و (j,k) ام ماتریس آن 1 باشد درایه (i,k) ام آن هم یک باشد.

مثال



$(3,4)\in R\ ,\ (4,1)\in R \longrightarrow (3,1)\notin R$

$(1,3)\in R\ ,\ (3,4)\in R \longrightarrow (1,4)\notin R$

رابطه ترایایی نیست.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

مثال $R=\{(1,2)\} \longrightarrow \overset{T}{\overbrace{(1,2)\in R}} \wedge \overset{F}{\overbrace{(2,?)\in R}} \longrightarrow T,F=T$ رابطه ترایایی است.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1&2\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}?&1\\?&?\end{bmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1&2\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\end{array} & \begin{bmatrix}1&1\\1&?\end{bmatrix}\end{array}$$

رابطه پاد (ضد) متقارن:

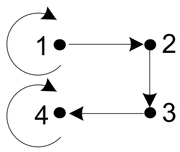
1) اگر $(a,b)\in R \wedge (b,a)\in R \longrightarrow a=b$

یعنی اگر از a به b یک یال جهتدار باشد،آنگاه از b به a یال جهتداری نباشد.

2) رابطه R ضد متقارن است هرگاه درایه (i,j) ام ماتریس آن 1 باشد درایه (j,i) آن صفر باشد. $(i\neq j)$

مثال $R=\{(1,2)\}$ رابطه پاد متقارن است.

مثال $R=\{(1,1),(1,2),(3,4),(4,4),(2,3)\}$



رابطه پاد متقارن است.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

مثال $A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array} \longrightarrow R=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

رابطه انعکاسی نیست.
رابطه متقارن نیست.
رابطه ترایایی است.
رابطه پاد متقارن است.

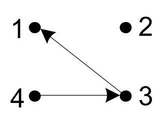
$\longrightarrow$ $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

رابطه ترایایی و پاد متقارن است.

مثال $A=\{1,2,3,4\}$

$R=\{(4,3),(3,1)\}$

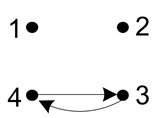
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$



تنها خاصیت پادمتقارن دارد

$R=\{(3,4),(4,3)\}$

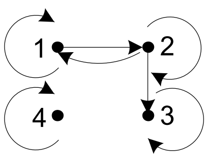
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$



تنها خاصیت متقارن دارد

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(2,1)\}$

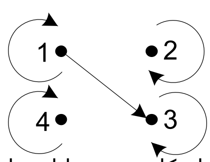
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$



تنها خاصیت انعکاسی دارد

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3)\}$

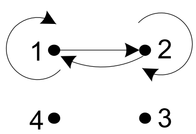
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$



انعکاسی و ترایایی است،متقارن نیست

$R=\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$

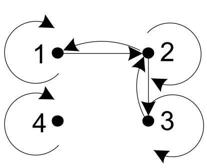
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$



متقارن و ترایایی است،انعکاسی نیست

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3)$
$,(3,2)\}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$



انعکاسی و متقارن است ،ترایایی نیست

رابطه های هم ارزی:

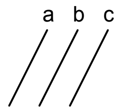
رابطه **R** روی **A** یک رابطه هم ارزی است هرگاه این رابطه بازتابی،متقارن و ترایایی باشد .

مثال: ماتریس متناظر با رابطه **R** بصورت زیر است آیا رابطه **R** یک رابطه هم ارزی است.؟**بله**

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$

مثال: رابطه موازی بودن روی مجموعه خطوط یک رابطه هم ارزی است.



-هرخط با خودش موازی است (خاصیت بازتابی)

-اگر خط **a** با خط **b** موازی باشد.خط **b** نیز با خط **b** موازی است.(متقارن)

-اگر خط **a** با خط **b** موازی باشد.و خط **b** نیز با خط **c** موازی باشد پس خط **a** با خط **c** موازی است.(ترایایی)

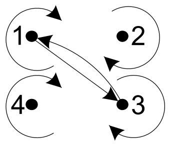
مثال: رابطه مساوی بودن روی مجموعه اعداد یک رابطه هم ارزی است. $a=a$ $\quad a=b \rightarrow b=a$ $\quad a=b \wedge b=c \rightarrow a=c$

دسته های(کلاسهای) هم ارزی:

فرض کنیم R روی مجموعه ناتهی A یک رابطه هم ارزی باشد .دسته هم ارزی a عبارت است از:
مجموعه کلیه عناصری از A که با a رابطه R دارند.دسته هم ارزی a را با [a] نمایش میدهیم.
a را نماینده کلاس هم ارزی [a] گویند.

$[a]=\{x\in A|xRa\} \overset{R \text{ متقارن}}{=} \{x\in A|aRx\}$ رابطه هم ارزی

مثال: رابطه هم ارزی R روی $A=\{1,2,3,4\}$ با گراف زیر تعیین شده است،دسته هم ارزی این رابطه را بنویسید.؟



$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,4),(4,2)\}$ $\begin{cases}[1]=\{x\in A|xR1\}=\{1\} & [4]=\{x\in A|xR1\}=\{2,4\}\\ [2]=\{x\in A|xR1\}=\{2,4\} & \\ [3]=\{x\in A|xR1\}=\{3\} & \end{cases}$

با توجه به یکی بودن کلاس هم ارزی [2] با [4] پس مجموعا سه نوع کلاس هم ارزی متفاوت وجود دارد.

با توجه به مثال قبل داریم :

1-این سه کلاس هم ارزی غیر تهی هستند.

2-اشتراک دو به دو کلاسهای هم ارزی تهی میباشد.

3-اجتماع سه کلاس هم ارزی برابر خود مجموعه A میباشد.

بنابراین نتیجه میگیریم این سه کلاس هم ارزی مجموعه A را افراز میکند.

نتیجه: اگر R یک رابطه هم ارزی روی مجموعه غیر تهی A باشد در اینصورت کلاسهای هم ارزی متمایز R مجموعه A را افراز میکند.

نمادگزاری:

برای نمایش یک رابطه هم ارزی روی یک مجموعه از نماد $\sim$ استفاده میکنند.

مثال: نشان دهید رابطه $\sim$ روی **Z** که بصورت زیر تعریف میشود یک رابطه هم ارزی است. $x\sim y \in z$ باشد 2 مضربی از $x-y$

(بازتابی) $x\sim x \rightarrow x-x=0=2\times 0$ مضربی از 2 است

(متقارن) $x\sim y \rightarrow$ $x-y$ مضربی از 2 باشد $\xrightarrow{\exists K\in Z} x-y=2k \rightarrow y-x=2\underbrace{(-k)}_{k_1} \rightarrow$ $y-x$ مضربی از 2 است $\rightarrow y\sim x$

(ترایایی) $\begin{cases}x\sim y \rightarrow \text{ مضربی از 2 باشد } x-y \rightarrow x-y=2k_1\\ y\sim z \rightarrow \text{ مضربی از 2 باشد } y-z \rightarrow y-z=2k_2\end{cases} \xrightarrow{+} x-z=2\underbrace{(k_1+k_2)}_{k_3} \rightarrow$ $x-z$ مضربی از 2 است $\rightarrow x\sim z$

1-هر مجموعه ناتهی است.

2-اشتراک آنها ناتهی است و اختلافشان همواره مضربی از 2 است.

3-اجتماع در مجموعه بطور کلی Z را تشکیل میدهد.

کلاسهای هم ارزی که Z را افراز میکنند.
$\begin{cases}[0] & \text{مجموعه اعداد زوج } A=\{\ldots,-2,0,2,4,\ldots\}\\ [1] & \text{مجموعه اعداد فرد } A=\{\ldots,-1,1,3,5,\ldots\}\end{cases}$

ترتیب جزعی:

رابطه R روی مجموعه A یک رابطه ترتیب جزعی است اگر R روی A بازتابی ،پاد متقارن و ترایایی باشد.

مثال: رابطه R روی N را بدین صورت تعریف میکنیم.آیا رابطه R روی مجموغه N ترتیب جزعی است؟ بله

$xRy \rightarrow x\leqslant y$

(بازتابی) $x\leqslant x$

(پاد متقارن) $x\leqslant y \wedge y\leqslant x \rightarrow x=y$

(ترایایی) $x\leqslant y \wedge y\leqslant z \rightarrow x\leqslant z$

مثال: رابطه زیر مجموعه بودن ($\subseteq$) روی هر مجموعه ای یک رابطه ترتیب جزعی است.

$A\subseteq A$ (بازتابی)

$A\subseteq B \wedge B\subseteq A \longrightarrow A=B$ (پاد متقارن)

$A\subseteq B \wedge B\subseteq C \longrightarrow A\subseteq C$ (ترایایی)

نمادگزاری:

معمولا رابطه ترتیب جزعی را با نماد $\preccurlyeq$ نشان میدهند.(نماد $\preccurlyeq$ بمعنای کوچکتر،مساوی نیست)

تعریف:

فرض کنیم $\preccurlyeq$ یک رابطه ترتیب جزعی روی مجموعه A باشد عناصر x,y در A را مقایسه پذیر گویند اگر داشته باشیم $x\preccurlyeq y$ یا $y\preccurlyeq x$

اگر عناصر x,y مقایسه پذیر نباشند آنها را مقایسه ناپذیر گوییم.

مثال: فرض کنید $A=\{a,b\}$ در اینصورت $P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ رابطه ترتیب جزعی را روی P(A) در نظر میگیریم.

الف) $\emptyset$ با $\{a\}$ مقایسه پذیر است. (بله)

ب) $\{a\}$ با $\{a,b\}$ مقایسه پذیر است.(بله)

ج) $\{a\}$ با $\{b\}$ مقایسه پذیر است. (خیر)

د) $\emptyset$ با $\{a,b\}$ مقایسه پذیر است.(بله)

الف) $\overbrace{\{a\}\subseteq\emptyset}^{F} \vee \overbrace{\emptyset\subseteq\{a\}}^{T} \longrightarrow T$

ب) $\overbrace{\{a\}\subseteq\{a,b\}}^{T} \vee \overbrace{\{a,b\}\subseteq\{a\}}^{F} \longrightarrow T$

ج) $\overbrace{\{a\}\subseteq\{b\}}^{F} \vee \overbrace{\{b\}\subseteq\{a\}}^{F} \longrightarrow F$

د) $\overbrace{\emptyset\subseteq\{a,b\}}^{T} \vee \overbrace{\{a,b\}\subseteq\emptyset}^{F} \longrightarrow T$

رابطه ترتیب کلی(کامل):

اگر رابطه R روی مجموعه A یک رابطه ترتیب جزعی باشد و اعضای R دو به دو مقایسه پذیر باشند.آنگاه R روی مجموعه A یک رابطه ترتیب کلی است.

مثال: اگر $A=\{a\}$ در اینصورت $P(A)=\{\emptyset,\{a\}\}$ آیا رابطه $\subseteq$ روی P(A) ترتیب کامل است؟ بله

-رابطه $\subseteq$ ترتیب جزعی است.(بنا به تعریف)

-اعضای P(A) دو به دو مقایسه پذیر است. $\emptyset\subseteq\{a\}$

نکته: در مثال 4 گزینه ای قبل ،ترتیب کامل نمیباشد.

فرمولهای بازگشتی:

a_n نمونه یک فرمول صریح است. $a_n=\frac{n^2+1}{n+3} \longrightarrow a_{20}=\frac{(20)^2+1}{20+3}=\frac{401}{23}$

a_n نمونه یک فرمول دنباله بازگشتی است. $a_1=3 \quad a_n=3a_{n-1}+5 \quad ,n>1 \longrightarrow \begin{cases} a_2=3a_1+5=9+5=14 \\ a_3=3a_2+5=47 \end{cases}$

مثال: دنباله a_n بصورت بازگشتی $,n>1 \quad a_n=2a_{n-1} \quad a_1=1$ تعریف شده است فرمول صریحی برای این دنباله بدست آورید؟

فرمول صریح حدس زده شده که باید اثبات شود. $\underset{2^0}{a_1=1} \quad \underset{2^1}{a_2=2a_1=2} \quad \underset{2^2}{a_3=4} \quad \underset{2^3}{a_4=8} \quad \underset{2^4}{a_5=16} \longrightarrow a_n=2^{n-1}$

فرض استقراء که درست در نظر گرفته میشود $n=k \longrightarrow a_k=2^{k-1}$

حکم استقراء که باید ثابت شود. $n=k+1 \longrightarrow a_{k+1}=2^k$

$a_{k+1}\xrightarrow[n=k+1]{a_n=2a_{n-1}} 2a_{k+1-1}=2a_k \xrightarrow[\text{فرض اسقراء}]{a_k=2^{k-1}} =2\,2^{k-1}=2^k$

مثال: n نفر در یک مهمانی حضور دارند این n نفر با هم تنها یکبار دست میدهند،یک فرمول بازگشتی برای تعداد دست دادنهای این n نفر بنویسید همراه با فرمول صریح آن؟

اگر در مهمانی 2 نفر حضور داشته باشند تنها یکبار دست دادن اتفاق می افتد و محاسبه آن بدین صورت میباشد. $a_n=a_2=1$

$1=n-1$

فرض کنیم a_{n-1} تعداد دست دادنهای $n-1$ را میدانیم با اضافه شدن یک نفر به جمع n-1 دست دادن دیگر به a_{n-1} اضافه میشود یعنی:

$a_2=1 \quad a_n=n-1+a_{n-1} \quad ,n>2$

$a_2=1 \qquad a_n= n-1+a_{n-1} \quad ,n>2$

$\underset{2+1}{a_3=3-1+a_2=3} \qquad \underset{3+2+1}{a_4=4-1+a_3=6} \qquad \underset{4+3+2+1}{a_5=5-1+a_4=10} \qquad \underset{5+4+3+2+1}{a_6=6-1+a_5=15} \longrightarrow a_n=(n-1)+(n-2)+\dots+3+2+1=\frac{(n-1)n}{2}$

$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n=n-1} \frac{n-1(n-1+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

فرض استقراء $n=k \longrightarrow a_k=\frac{(k-1)k}{2}$

حکم استقراء $n=k+1 \longrightarrow a_{K+1}=\frac{(k+1)k}{2}$

$a_{K+1}=\underbrace{k+1-1+a_k}_{a_n=n-1+a_{n-1}}=k+\frac{(k-1)k}{2}=\frac{2k+k^2-k}{2}=\frac{k^2+k}{2}=\frac{k(k+1)}{2}$

حل رابطه های بازگشتی خطی درجه 2 همگن با ضرایب ثابت:

هر رابطه بازگشتی به شکل $\boxed{a_n=Aa_{n-1}+Ba_{n-2}, n\geqslant 2}$ که در آن A,B اعداد ثابتی هستند و $B\neq0$، یک رابطه بازگشتی خطی درجه 2 همگن با ضرایب ثابت میباشد.

به این دلیل این رابطه را درجه دوم میگوییم که a_n برحسب دو جمله ای قبلی اش یعنی a_{n-2}, a_{n-1} تعریف میشود.

خطی میگویند زیرا توانهای a_{n-2}, a_{n-1} یک است.

همگن میگویند زیرا درجه همه جملاتش یکسان است و فاقد جمله ثابت است.

با ضرایب ثابت میگویند زیرا A,B اعداد ثابتی اند و به n بستگی ندارند.

معادله مشخصه یک رابطه بازگشتی خطی همگن درجه دوم با ضرایب ثابت.

$$a_n=Aa_{n-1}+Ba_{n-2}, n\geqslant 2 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} \boxed{x^2=Ax+B}$$

مثال: معادله مشخصه رابطه بازگشتی ذکر شده را بنویسید.؟ $a_n=Aa_{n-1}+2a_{n-2}, n\geqslant 2$

$$\begin{cases} a_n=x^2 \\ a_{n-1}=x^{2-1} \\ a_{n-2}=x^{2-2} \end{cases} \longrightarrow x^2=x+2$$

قضیه:

اگر معادله مشخصه رابطه بازگشتی خطی همگن درجه دوم با ضرایب ثابت دارای دو ریشه متمایز r,s باشد آنگاه فرمول صریح a_n بدین شکل میباشد.

c,d اعداد حقیقی هستند که مقدارشان برحسب شرایط اولیه یعنی a_0, a_1 بدست می آید.

$$\boxed{a_n=cr^n+ds^n}$$

مثال

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}+2a_{n-2} & n\geqslant 2 \\ 1 & n=0 \\ 8 & n=1 \end{cases} \quad a_0=1, a_1=8$$

$$x^2=x+2 \rightarrow x^2-x-2=0 \rightarrow (x+1)(x-2) \begin{cases} x=-1=r \\ x=2=s \end{cases}$$

$$a_n=cr^n+ds^n \rightarrow a_n=c2^n+d(-1)^n$$

$$\left.\begin{cases} n=0 \rightarrow a_0=c2^0+d(-1)^0 \rightarrow 1=c+d \\ n=1 \rightarrow a_1=c2^1+d(-1)^1 \rightarrow 8=2c-d \end{cases}\right\} + \rightarrow 9=3c \rightarrow c=3 \rightarrow d=1-c=-2$$

$$a_n=cr^n+ds^n \rightarrow a_n=3(2)^n-2(-1)^n$$

تمرین

$$\begin{cases} a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2} & n\geqslant 2 \\ -1 & n=0 \\ 0 & n=1 \end{cases} \quad a_0=-1, a_1=0$$

$$x^2=5x-6 \rightarrow x^2-5x+6=0 \rightarrow (x-3)(x-2) \begin{cases} x=3=r \\ x=2=s \end{cases}$$

$$a_n=cr^n+ds^n \rightarrow a_n=c3^n+d2^n$$

$$\begin{cases} n=0 \rightarrow a_0=c3^0+d2^0 \rightarrow -1=c+d \rightarrow c=-1-d \\ n=1 \rightarrow a_1=c3^1+d2^1 \rightarrow 0=3c+2d \rightarrow 0=3(-1-d)+2d \rightarrow 0=-3-3d+2d \\ \qquad \rightarrow d=-3 \\ \qquad c=2 \end{cases}$$

$$a_n=cr^n+ds^n \rightarrow a_n=2(3)^n-3(2)^n$$

حل رابطه های بازگشتی خطی درجه 2 همگن با ضرایب ثابت وقتی معادله مشخصه آن ریشه مضاعف دارد.

$$\boxed{a_n=(c+dn)r^n=cr^n+dnr^n}$$

مثال
$$\begin{cases} a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2} & n\geq 2\\ 1 & n=0\\ 2 & n=1\end{cases}$$
$a_0=1,a_1=2$

$$x^2=6x-9 \to x^2-6x+9=0 \to (x-3)^2 \begin{cases}s=3\\ r=3\end{cases}$$
$$a_n=cr^n+dns^n \to a_n=c3^n+dn3^n$$
$$\begin{cases} n=0 \to a_0=c3^0+d0(3)^0 \to 1=c\\ n=1 \to a_1=c3^1+d1(3)^1 \to 2=3c+3d \to 2=3+3d \to d=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$a_n=c3^n+dn3^n \to a_n=3^n-\frac{1}{3}n3^n=3-n3^{n-1}$$

تمرین
$$\begin{cases} a_{n+2}=8a_{n+1}-16a_n & n\geq 2\\ 0 & n=0\\ 8 & n=1\end{cases}$$
$a_0=0,a_1=8$

$$x^2=8x-16 \to x^2-8x+16 \to (x-4)^2 \begin{cases}s=4\\ r=4\end{cases}$$
$$a_n=c4^n+dn4^n \leftarrow a_n=cr^n+dns^n$$
$$\begin{cases} n=0 \to a_0=c4^0+dn4^0 \to c=0\\ n=1 \to a_1=c4^1+dn4^1 \to 8=4c+4d \to 2=c+d \to d=2\end{cases}$$

$$a_n=c4^n+dn4^n \to a_n=0(4)^n+2n4^n \to a_n=2n4^n$$

ممکن است بعضی از ریشه های معادله مشخصه یک رابطه بازگشتی همگن با ضرایب حقیقی عدد مختلط باشد.

مثال
$$\begin{cases} a_n=-a_{n-2} & n\geq 3\\ 1 & n=1\\ 2 & n=2\end{cases}$$

$$a_n=-a_{n-2} \to a_n+a_{n-2}=0 \to x^2+1=0 \to x^2=-1 \begin{cases}s=+i\\ r=-i\end{cases}$$
$$x^2=-1 \begin{cases}a=1\\ b=0\\ c=1\end{cases} \to b^2-4ac=-4 \to s,r=\frac{-0\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{\pm\sqrt{4i^2}}{2}=\frac{\pm 2i}{2}=\pm i$$
$$-c+d=i$$

$$a_n=cr^n+ds^n \to a_n=c(i)^n+d(-i)^n \begin{bmatrix} n=1 \to a_1=ci-di=1 \xrightarrow{\times i} -c+d=i\\ n=2 \to a_1=ci^2+d(-i)^2=2 \to -c-d=2\end{bmatrix} + \to -2c=i+2 \to c=\frac{i+2}{-2} \begin{cases}-c+d=i\\ \frac{i+2}{2}-i=\frac{2-i}{-2}=d\end{cases}$$

$$a_n=cr^n+ds^n=\left(\frac{i+2}{-2}\right)i^n+\left(\frac{2-i}{-2}\right)(-i)^n=\left(-1-\frac{i}{2}\right)i^n+\left(\frac{i}{2}-1\right)(-i)^n$$

برج هانوی:

حول یکی از 3 میله ، n قرص که وسط آنها سوراخ است و دارای قطرهای متفاوت هستند به ترتیب نزولی قطر چیده شده اند.طوری که بزرگترین قرص در زیر قرار دارد میخواهیم قرص ها رابا رعایت شرایط زیر از طریق میله دوم به میله سوم انتقال دهیم.

الف)هر دفعه فقط یک قرص حرکت داده شود.

ب)هیچ قرص بر روی قرص کوچکتر از خود قرار نگیرد.

اگر a_n تعداد حرکتهای لازم برای انتقال این n قرص باشد رابطه بازگشتی برای a_n بدست آوریدو آنرا حل کنید(فرمول صریح)

ابتدا با a_{n-1} حرکت n-1 قرص فوقانی را به میله دوم انتقال میدهیم و سپس با یک حرکت بزرگترین قرص را به میله سوم سوم انتقال داده ،سپس n-1 قرص میله دوم را با a_{n-1} حرکت به میله سوم انتقال میدهیم.

1 2 3

$$\begin{cases} a_n=2a_{n-1}+1 & n\geq 2\\ 1 & n=1\\ a_1=1 \end{cases}$$

$$a_n=2a_{n-1}+1 \xrightarrow{a_{n-1}=2a_{n-2}+1} =2^2a_{n-2}+2+1 \xrightarrow{a_{n-2}=2a_{n-3}+1} =2^3a_{n-3}+2^2+2+1$$
$$\to 2^{n-1}a_1+\ldots+2^2+2+1=\frac{2^n-2^0}{2-1}=2^n-1$$

$$\boxed{a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}}$$

$$\boxed{\sum_{n-1}^{\infty} aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}}$$

جبر بولی:

فرض کنیم B مجموعه ای غیر تهی است که روی آن دو عمل دوتایی بسته +، . ویک عمل یک تایی ` تعریف شده است. و 0،1 دو عنصر متمایز B هستند در اینصورت به ساختار (B,+, . ,`, 0 ,1) یک جبر بولی گویند هرگاه برای هر سه عنصر دلخواه a,b,c از B داشته باشیم.

جابجایی $\begin{cases} a+b=b+a \\ a.b=b.a \end{cases}$ جابجایی $\begin{cases} a+(b.c)=(a+b).(a+c) \\ a.(b+c)=(a.b)+(a.c) \end{cases}$ همانی $\begin{cases} a+0=a \\ a.1=a \end{cases}$ متمم گیری $\begin{cases} a+a'=1 \\ a.a'=0 \end{cases}$

عملهای دوتایی +, . را به ترتیب جمع و ضرب و عمل ´ را متمم مینامیم،بعلاوه 0 را عضو همانی جمع و 1 را عضو همانی ضرب و a´ را متمم a مینامیم.

مثال: اگر B=[0,1] آنگاه +, . را بصورت زیر تعریف میکنیم.(به شرط 1´=0, 0´=1)

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

$\begin{cases} 0+1=1+0 \\ 0.1=1.0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1+(1.0)=(1+1).(1+0) \\ 1.(1+0)=(1.1)+(1.0) \end{cases}$ $\begin{cases} 1+0=1 \\ 1.0=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1+1'=1, 0+0'=1 \\ 1.1'=0, 0.0'=0 \end{cases}$

در اینصورت (B,+, . ,1,0,1) یک جبر بولی است.

مثال: اگر B=[0,1] و مجموعه n دنباله های شناخته شده از عناصر B یعنی B^n باشد.با اعمال جمع و ضربی که مولفه به مولفه اجرا میشود بشرط 1´=0, 0´=1 یک جبر بول میباشد.

مثلا در B 00000 همانی جمع و 11111 همانی ضرب است و اگر بطور مثال x=10011,y=11110 آنگاه

x	1	0	0	1	1
x´	0	1	1	0	0

x	1	0	0	1	1
y	1	1	1	1	0
x+y	1	1	1	1	1

x	1	0	0	1	1
y	1	1	1	1	0
x.y	1	0	0	1	0

مثال: اگر U یک مجموعه مرجع باشد و B برابر مجموعه توانی U باشد یعنی B=P(U) و اعمال جمع ،ضرب و متمم گیری را به ترتیب اعمال اجتماع ،اشتراک و متمم گیری در نظر بگیریم و همچنین فرض کنیم $0=\phi$ و 1=U آنگاه $(B,\cup,\cap,\phi,U)$ یک جبر بولی است.

$\begin{cases} a\cup b=b\cup a \\ a\cap b=b\cap a \end{cases}$ $\begin{cases} a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c) \\ a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c) \end{cases}$ $\begin{cases} a\cup\phi=a \\ a\cap u=a \end{cases}$ $\begin{cases} a\cup a'=u \\ a\cap a'=\phi \end{cases}$ این جبر را جبر بولی مجموعه ها گویند.

مثال: فرض کنیم B مجموعه گزاره ها و اعمال ضرب و جمع و متمم گیری به ترتیب اعمال فصلی (V) عطفی (Λ) نفی گیری (~) گزاره ها باشد و همچنین F=0 گزاره همیشه نادرست و T=1 گزاره همیشه درست باشد آنگاه (B,V, Λ, ~,F,T) یک جبر بولی است.

$\begin{cases} p\wedge q=q\wedge p \\ pVq=qVp \end{cases}$ $\begin{cases} pV(q\wedge r)=(pVq)\wedge(pVr) \\ p\wedge(qVr)=(p\wedge q)V(p\wedge r) \end{cases}$ $\begin{cases} p\wedge T=p \\ pVF=p \end{cases}$ $\begin{cases} p\wedge\sim p=F \\ pV\sim p=T \end{cases}$

قضیه: فرض کنید $P_1,P_2,P_3,\dots,P_k$ اعداد اول متمایز و $n=P_1P_2\dots P_k$ و D_n مجموع مقسوم علیه های مثبت n است اعمال + , . , ` را بترتیب برای هر b,a در D_n بصوت زیر تعریف میکنیم.

$\begin{cases} a+b=[a,b] & \text{کوچکترین مضرب مشترک=ک.م.م} \\ a.b=(a,b) & \text{بزرگترین مقسوم علیه مشترک=ب.م.م} \\ a'=\frac{n}{a} \longrightarrow \begin{cases} 1= \text{عضو همانی جمع} \\ n= \text{عضو همانی ضرب} \end{cases} \end{cases} \longrightarrow (D_n ,+, . ,',1,n)$

عضو همانی

عضو همانی

$(D\ \ ,+, . ,',1,n)$ $\begin{cases} 1)\ (a,b)=(b,a)\ ,\ [a,b]=[b,a] & 3)\ [a,1]=a \quad (a,n)=a \\ 2)\ \begin{matrix}[a,(b,c)]=([a,b],[a,c]) \\ (a,[b,c])=[(a,b),(a,c)]\end{matrix} & 4)\ [a\ ,\frac{n}{a}]=n \quad (a\ ,\frac{n}{a})=1 \end{cases}$ جبر بول است.

مفهوم بسته بودن:

در مجموعه N عمل جمع و ضرب نسبت به N بسته است ،یعنی اگر دو عضو دلخواه را از N بگیریم و در هم ضرب یا جمع کنیم نتیجه آن نیز در N خواهد بود .همین موضوع در ارتباط با مجموعه Z نیز صادق است.

اثبات جبر بول: برای اثبات جبر بول باید اولا بسته باشد و ثانیا 4 مقایسه ذکر شده در مثالهای جبر بولی برقرار باشد.

تمرین: کدامیک از ساختارهای زیر جبر بولی هستند؟

1) $\begin{cases} A+C=A\cup C \\ A.C=A\cap C \\ A'=\{1,2,3\}-A \end{cases}$ $\quad B=\{\{0\},\{0,1\},\{1,2\},\{1,3\}\}$ $\quad A,C\in B$ $\longrightarrow \{1,2\}+\{1,3\}=\{1,2\}\cup\{1,3\}=\{1,2,3\}\notin B$

جبر بول نیست چون نسبت به عمل جمع بسته نیست.

2) $\begin{cases} x+y=[x,y] \\ x.y=(x,y) \\ A'=\dfrac{70}{x} \end{cases}$ $\quad B=\{1,5,10,70\}$ $\quad x,y\in B$ $\longrightarrow$ $[1,5]=5\in B$, $(1,5)=1\in B$ ک.م.م و ب.م.م صادق است $\quad 5'=\dfrac{70}{5}=14\notin B$

جبر بول نیست چون نسبت به عضو همانی بسته نیست.

3) $\begin{cases} x+y=[x,y] \\ x.y=(x,y) \\ A'=\dfrac{70}{x} \end{cases}$ $\quad B=\{1,2,35,70\}$ $\longrightarrow$

ک.م.م و ب.م.م صادق است

$x+y=[x,y]$

+	1	2	35	70
1	1	2	35	70
2	2	2	70	70
35	35	70	35	70
70	70	70	70	70

$x.y=(x,y)$

.	1	2	35	70
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
35	1	1	35	35
70	1	2	35	70

$A'=\dfrac{70}{x}=\dfrac{70}{1},\dfrac{70}{2},\dfrac{70}{35},\dfrac{70}{70}=70,35,2,1\in B$

جبر مذکور نسبت به عمل جمع و ضرب و عضو همانی بسته است و طبق قضیه مطرح شده در بالا 70 شامل مضارب اعداد اول 2،5،7 میباشد و چهار اصل جبر بول برقرار است لذا در مجموعه B یک جبر بولی میباشد.

$n=P_1,P_2,\ldots P_k \longrightarrow 70=2*5*7$

4) $\begin{cases} + & \text{جمع معمولی ماتریس} \\ \blacksquare & \text{ضرب معمولی ماتریس} \\ ' & \text{قرینه ماتریس} \end{cases}$ $\quad B=\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\}$ $\quad \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\notin B$

جبر بول نیست چون نسبت به عمل جمع بسته نیست.

5) $\begin{cases} A+C=A\cup C \\ A.C=A\cap C \\ A'=\{1,2,3\}-A \end{cases}$ $\quad A=\{1,2,3\},\ B=P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

+	ϕ	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
ϕ	ϕ	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
{1}	{1}	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,2}	{1,3}	{1,2,3}	{1,2,3}
{2}	{2}	{1,2}	{2}	{2,3}	{1,2}	{1,2,3}	{2,3}	{1,2,3}
{3}	{3}	{1,3}	{2,3}	{3}	{1,2,3}	{1,3}	{1,2,3}	{1,2,3}
{1,2}	{1,2}	{1,2}	{1,2}	{1,2,3}	{1,2}	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}
{1,3}	{1,3}	{1,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,3}	{1,2,3}	{1,2,3}
{2,3}	{2,3}	{1,2,3}	{2,3}	{2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{2,3}	{1,2,3}
{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}

نسبت به عمل جمع و ضرب و همانی بسته است و روابط جبر بول نیز در آن صادق است پس بطور کلی یک جبر بولی میباشد.

مثال:

ترتیب اولویتها: $\begin{cases} (\ ) \\ ' \\ \blacksquare \\ + \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=[x,y] & \text{ک.م.م} \\ x.y=(x,y) & \text{ب.م.م} \\ A'=\dfrac{210}{x} \end{cases}$ $\quad$ B={ مجموع مقسوم علیه های مثبت عدد طبیعی 210 }=B

1) $30+5.7 \longrightarrow [30,(5,7)]=[30,1]=30$

2) $(30+5).(30+7) \longrightarrow ([30,5],[30,7])=(30,210)=30$

3) $(14+15)' \longrightarrow \dfrac{210}{[14,15]}=\dfrac{210}{210}=1$

4) $21.(2+10') \longrightarrow (21,[2,21])=(21,42)=21$

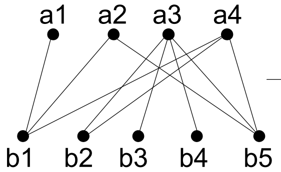
5) $(2+3)+5 \longrightarrow [[2,3],5]=[6,5]=30$

6) $(6+35).(7+10) \longrightarrow ([6,35],[7,10])=(210,70)=70$

مفهوم گراف: گراف در لغت به معنای شکل و نمودار است.

مثال:

یک شرکتی برای اجرای یک پروژه بزرگ که از چهار بخش a1,a2,a3,a4 تشکیل شده است به پنج نفر متخصص برای تصدی این بخشها با تخصصهای b1,b2,b3,b4,b5 در اختیار دارد طبق فهرست زیر برخی صلاحیت بیش از یک بخش را دارند.



$\rightarrow \begin{cases} (a1,b1),(a2,b5),\underline{(a3,b3)},(a4,b2) \\ (a1,b1),(a2,b5),\underline{(a3,b4)},(a4,b2) \end{cases}$

-b1 میتواند در سه بخش a1,a2,a4 فعالیت کند.

-b2 میتواند در دوبخش a3,a4 فعالیت کند.

-b3,b4 تنها در بخش a3 میتوانند فعالیت کنند.

-b5 میتواند در بخشهای a2,a3,a4 میتواند فعالیت کند.

با این پنج نفر ،شرکت به چند طریق میتواند برای بخشهای a1,a2,a3,a4 متصدی انتخاب کند.؟به دو طریق

تعریف:

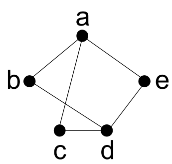
گراف G=(V,E) شامل زوج مرتبی چون (V,E) است که در آن V=Vertex بمعنای راس های G که مجموعه ای متناهی و نا تهی میباشد و E=edge بمعنای یالهای G شامل زیر مجموعه ای از مجموعه تمام زیر مجموعه های دو عضوی V است.

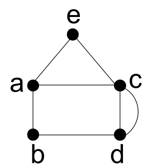
مثال بالا $\begin{cases} V=\{a1,a2,a3,a4,b1,b2,b3,b4,b5\} \\ E=\{\{a1,b1\},\{a2,b1\},\{a2,b5\},\{a3,b2\},\{a3,b3\},\{a3,b4\}\{a3,b5\},\{a4,b1\},\{a4,b2\},\{a4,b5\}\} \end{cases}$

$\begin{cases} G=(V,E)= \begin{cases} (a1,b1),(a2,b5),(a3,b3),(a4,b2) \\ (a1,b1),(a2,b5),(a3,b4),(a4,b2) \end{cases} \\ ab=\{a,b\}\in E,\ a\neq b \\ G=(V,E)\subseteq E \end{cases}$

مثال: نمودار گراف زیر را ترسیم نمایید؟

$G=(V,E) \begin{cases} E=\{\{a,b\},\{a,e\},\{a,c\},\{c,d\},\{e,d\},\{b,d\}\} \\ V=\{a,b,c,d,e\} \end{cases} \rightarrow$

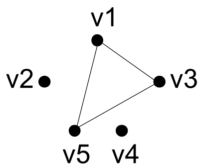




گراف دارای 5 راس و 6 یال است.
بطور مثال a,b مجاورند ولی a,d مجاور نیستند.

مثال: نمودار گراف زیر را ترسیم نمایید؟

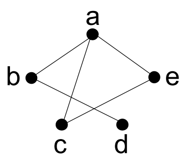
$G=(V,E) \begin{cases} E=\{\{v1,v3\},\{v1,v5\},\{v3,v5\}\} \\ V=\{v1,v2,v3,v4,v5\} \end{cases}$



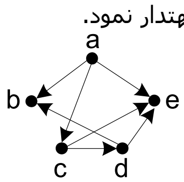
رئوس v2,v4 با هیچ راسی مجاور نیستند چنین راسهایی را رئوس منفرد یا تنها مینامند.در حقیقت هر راسی که شامل هیچ یالی نباشد ،راس منفرد میگویند.

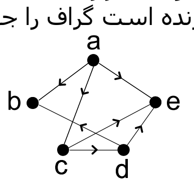
مثال: پنج تیم a,b,c,d,e با هم مسابقه میدهند.و نتایج زیر را داریم.

- a با b,c,e مسابقه داده و بر همگی پیروز شده است.
- b با a,d روبرو شده و از هر دو شکست خورده است.
- c با a,d,e مسابقه داده بر d,e پیروز شده است و ازa شکست خورده است.
- d با b,c,e بازی کرده ، b,e را شکست داده و از c شکست خورده است.
- e با a,c,d مسابقه داده است.



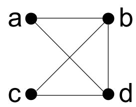
میتوان با قرارداد فلشی روی یال که جهت آن از برنده بطرف بازنده است گراف را جهتدار نمود.



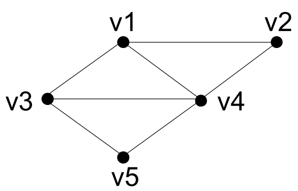


مثال: نمودار گراف زیر را ترسیم نمایید؟

$G=(V,E) \begin{cases} E=\{\{a,b\},\{b,d\}\{d,c\},\{a,d\},\{c,b\}\} \\ V=\{a,b,c,d\} \end{cases}$



مثال: نمودار گراف G=(V,E) در شکل زیر نصب شده است مجموعه V,E را مشخص کنید؟

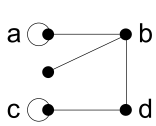


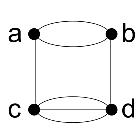
$\rightarrow G=(V,E) \begin{cases} E=\{\{v1,v2\},\{v1,v3\},\{v1,v4\},\{v2,v4\},\{v3,v4\},\{v3,v5\},\{v4,v5\}\} \\ V=\{v1,v2,v3,v4,v5\} \end{cases}$

گراف چندگانه:

گرافی است که شامل طوقه یا یالهای چند گانه است،منظور از طوقه یالی است که دو انتهایش بر هم منطبق است.

اگر دو راس با بیش از یک یال به هم وصل باشند این یالها را یال چند گانه میگوییم.





در کتاب ریاضیات گسسته مقصود از گراف گراف ساده است نه چند گانه.

قضیه: هریال در گراف ساده بیانگر یک زیر مجموعه دو عضو از مجموعه رئوس است.

$P=$ تعداد اعضای V در گراف G=(V,E)

$$\boxed{C_p^2=\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}}$$

مثال: چند گراف ساده G=(V,E) وجود دارند که مجموعه راسهای آن 4 عضو داشته باشند؟

تعداد زیر مجموعه های دو عضوی یک مجموعه 4 عضوی $\binom{4}{2}=6$

تعداد زیر مجموعه های مجموعه 6 عضوی $2^6=64$

$\longrightarrow$ لذا 64تا گراف میتوان ساخت که راسهای آن 4 عضو داشته باشند

قضیه: در حالت کلی تعداد گرافهای ساده با P راس برابر است با $\boxed{2^{\frac{P(P-1)}{2}}}$

مرتبه گراف: در هر گراف G تعداد راسهای گراف را مرتبه گراف G مینامند و آنرا با حرف P نمایش میدهند.

اندازه یک گراف: تعداد یالهای گراف G را اندازه G گویند و با q نمایش میدهند.

$$\boxed{0\leqslant q=|E|\leqslant|x|=\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}}$$

G=(V,E) q=|E| V=|P|

$$\boxed{0\leqslant q\leqslant\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}}$$

G=(V,E) q<|E| V=|P|

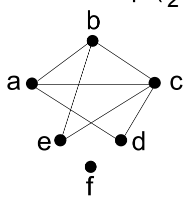
X={ زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه V }

نتیجه: اگر یک گراف دارای P راس باشد آنگاه حداکثر $\frac{p(p-1)}{2}$ یال دارد

درجه یک راس: در یک گراف G ،درجه یک راس V برابر تعداد یالهایی است که از V عبور میکند.درجه V را با (deg V),deg(V) نشان میدهند.

راس فرد و راس زوج: یک راس را فرد میگوییم هرگاه درجه آن عددی فرد باشد و یک راس را زوج میگوییم هر گاه درجه آن عددی زوج باشد.

مثال: در شکل زیر یک گراف G=(V,E) رسم شده است.(مرتبه ،اندازه گراف G ،درجه هر راس و زوج و فرد بودن آن و صحت $(0\leqslant q\leqslant\binom{p}{2})$ را مشخص کنید.



$$G=(V,E)\begin{cases}E=\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,e\},\{c,e\},\{c,d\}\}=7\\ V=\{a,b,c,d,e,f\}=6\end{cases}$$

اندازه گراف $q=|E|=7$ مرتبه گراف $P=|v|=6$

Deg(a)=3 Deg(b)=3 Deg(c)=4

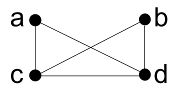
Deg(d)=2 Deg(e)=2 Deg(f)=0

درست است $q=7<\frac{p(p-1)}{2}=15$

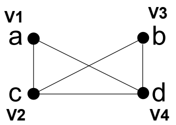
مثال: اگر V={a,b,c,d}، آیا گرافی وجود دارد که deg(a)=1,deg(b)=1,deg(c)=3,deg(d)=3 باشد.

بایستی سه یال از c به a,b,d وجود داشته باشد. Deg(c)=3

بایستی سه یال از d به a,b,c وجود داشته باشد. Deg(d)=3



$\longrightarrow$ Deg(a)≥2 Deg(b)≥2 لذا گرافی با شرایط فوق وجود ندارد.



$$\left.\begin{array}{l}Deg(a)=2\\ Deg(b)=2\\ Deg(c)=3\\ Deg(d)=3\end{array}\right\}$$

Deg(a+b+c+d)=10

q=5

$$\sum_{i=1}^{4} vi=(2+2+3+3)=10=2q$$

مجموعه درجه های هرگراف برابر دو برابر تعداد یالهای گراف و زوج است.

$V=(V_1+V_2+\ldots+V_p)$ $\boxed{\sum_{i=1}^{P}\deg(Vi)}$

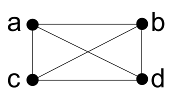
مثال: آیا گراف G با درجه رئوس 1,1,2,3 وجود دارد که مرتبه G آن 4 باشد؟

چون جواب زوج نیست قابل قبول نیست. 1+1+2+3=7 مجموع درجه های رئوس = 2q

گراف تهی: گراف بدون یال

گراف کامل: فرض کنیم G یک گراف کامل از مرتبه P باشد،Gرایک گراف کامل گوییم هرگاه درجه هرراس آن P-1 باشد.در حقیقت G یک گراف کامل است هرگاه بین هر دو راس آن یک یال موجود باشد.

گراف کامل از مرتبه P را با K_p نمایش میدهند.



K_4

$$\sum_{i=1}^{4} vi=4(4-1)=2q\longrightarrow q=\frac{12}{2}=6$$

فرمول بدست آوردن یال در گراف کامل $\boxed{q=\frac{p(p-1)}{2}=\binom{p}{2}\quad K_p}$

K_1

مثال: اگر گراف G از مرتبه 5 باشد،به ازای چه مقداری برای q گراف G کامل است؟

$$q=\frac{p(p-1)}{2}=\frac{5(5-1)}{2}=10$$

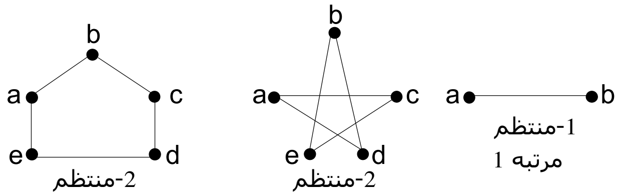
مثال: اگر گراف K، 15 یال داشته باشدمقدار P کدام است؟

$$\frac{p(p-1)}{2}=15 \longrightarrow p(p-1)=30 \longrightarrow 6*5=30 \longrightarrow P=6$$

r-منتظم

فرض کنیم r عدد صحیح و نامنفی باشد ($r\in N$)، گراف G از مرتبه P را r-منتظم گوهیم هرگاه درجه هر راس آن برابر r باشد.

هرگراف کامل K_p یک گراف (p-1)-منتظم است.



2-منتظم مرتبه 5 | 2-منتظم مرتبه 5 | 1-منتظم مرتبه 1

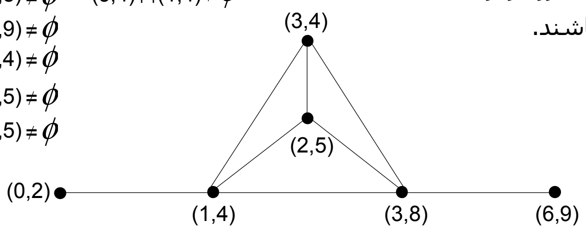
گراف بازه ها:

این گراف طوری ترسیم شده است که دوری بزرگتر از 3 نباشد.
نقاطی که اشتراک ندارند نباید یال داشته باشند.

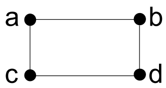
$(0,2)\cap(3,4)=\phi$
$(3,4)\cap(6,9)=\phi$
$(2,5)\cap(6,9)=\phi$

$(0,2)\cap(1,4)\neq\phi$
$(1,4)\cap(3,8)\neq\phi$
$(3,8)\cap(6,9)\neq\phi$
$(2,5)\cap(1,4)\neq\phi$
$(3,8)\cap(2,5)\neq\phi$
$(3,4)\cap(2,5)\neq\phi$

$(3,4)\cap(3,8)\neq\phi$
$(3,4)\cap(1,4)\neq\phi$



مثال: آیا گراف Gکه نمودار آن بشکل ذیل میباشد یک گراف بازه ای است؟



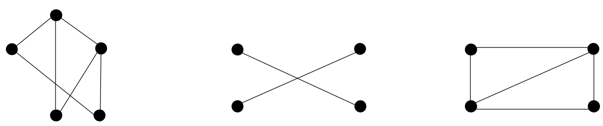
$a=(x_1,y_1)$ $c=(x_3,y_3)$
$b=(x_2,y_2)$ $d=(x_4,y_4)$ $\longrightarrow x_1\leq x_2\leq x_3\leq x_4$

راسهای b,d مجاور هستند. $(x_2,y_2)\cap(x_4,y_4)\neq\phi$ $x_2\leq x_4<y_2$

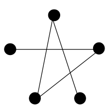
راسهای b,c مجاور هستند. $(x_2,y_2)\cap(x_3,y_3)\neq\phi$ $x_2\leq x_3<y_2$

$\longrightarrow x_4\leq y_2<x_3 \longrightarrow x_4<x_3$ این یک تناقض است پس نمیتواند یک گراف بازه ای باشد.

پس اگر نمودارگرافی شامل یک چهار ضلعی بدون قطر باشد گراف بازه ای نخواهد بود.



بعلت ذکر شده بالا بازه ای نیستند



بازه ای است.

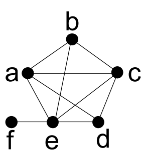
دنباله درجه راسهای یک گراف:

اگر دنباله(d1,d2,…) دنباله درجه راسهای یک گراف باشد آنگاه $\sum_{i=1}^{P} di$ یک عدد زوج و برابر 2q است.

درجه هر راس برابر است با تعداد یالهای متلاقی با راس

P= تعداد راسها،مرتبه گراف

q= تعداد یالها،اندازه گراف

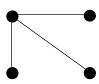


Deg(a)=4 ,d1=4
Deg(b)=3 ,d2=3
Deg(c)=4 ,d3=4
Deg(d)=3 ,d4=3
Deg(e)=5 ,d5=5
Deg(f)=1 ,d6=1

دنباله نزولی (5,4,4,3,3,1)

$$\sum_{i=1}^{P} di=2q=20$$

مثال: دنباله درجه های راسهای یک گراف عبارت است از (3,1,1,1) ،نمودار این گراف را رسم کنید؟



$3+1+1+1=6=2q \longrightarrow q=3$

ویژه گیهای دنباله یک گراف ساده:

1-مجموعه درجه های آن همیشه زوج است. $\sum_{i=1}^{P} di=2q$

2-تعداد جملات(اعداد) فرد دنباله باید زوج باشد.

3-بزرگترین جمله دنباله حد اکثر p-1 است

4-اگر یک جمله دنباله p-1 باشد ،هیچکدام از جملات دنباله صفر نیست.

5-حداقل دو جمله دنباله باید با هم مساوی باشند.(حداقل دو راس دارای درجه های یکسان هستند-اصل لانه کبوتری)

مثال: کدام یک از دنباله های زیر میتواند دنباله درجه های راسهای یک گراف ساده باشد؟

(4,3,3,2,0) T

(9,4,4,4,3,2,2,2,1,1) T

(6,6,3,3,2,1,0) F تعداد جملات فر د،زوج نیست

(3,3,3,2,2,2,0,0,0) F تعداد جملات فر د،و مجموع جملات زوج نیست

مثال: دنباله درجه راسهای یک گراف بصورت (6,6,x,y,3,2,2) است ،اگر اندازه گراف 13 باشد مقدار x,y را پیدا کنید؟

تعداد جملات فر د،و مجموع جملات باید زوج باشد ،پس یک متغییر باید فرد و یک متغییر باید زوج باشد تا این عبارت صحیح شود

6+6+x+y+3+2+2=26

x+y=7

x,y=4,3 x,y=5,2

$\sum_{i=1}^{P} di$ =2q=2*13=26

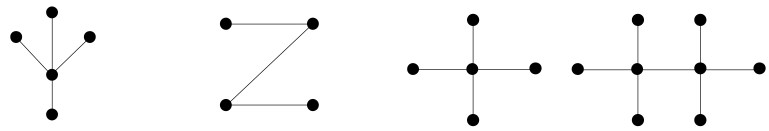
مسیر ،دور

طول یک مسیر تعداد یالهای این مسیر است.

دنباله ای که فقط از یک راس تشکیل شده باشد مسیری بطول صفر است.

در یک مسیر نباید از یک راس دو بار عبور کرد.

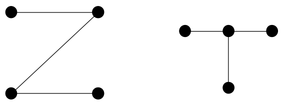
یک دور بطول n ،مسیری است به طول n که راسهای ابتدا و انتهای مسیر بر هم منطبقند.



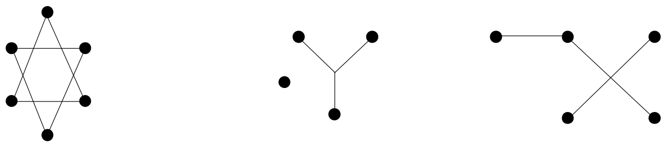
نمونه گرافهای بدون دور

گراف همبند

گرافی همبند است که بین هر دو راس دلخواه آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.



نمونه گرافهای همبند.



نمونه گرافهای ناهمبند.

گراف همیلتونی

اگر گرافی از مرتبه P>=3 ،دوری به طول P داشته باشد ،گرافی همیلتونی است.

گرافی که بتوان دوری در آن یافت که از همه رئوس گراف بگذرد.

هر گراف کامل K_p P>=3 یک گراف همیلتونی است.

نمونه گراف همیلتون

درخت:

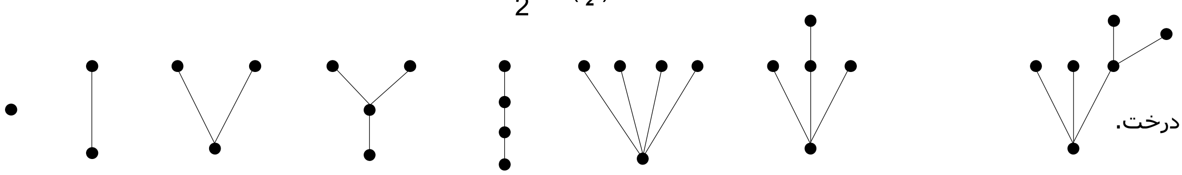
گرافی که همبند باشد و هیچ دوری نداشته باشد درخت میگوییم. یعنی بین دو راس یک درخت دقیقا یک مسیر وجود دارد.

در درخت این فرمول صادق است.(1-تعداد راسها=تعداد یالها) (q=p-1) Or (p=q+1)

در درخت این فرمول صادق است.(1-تعداد راسها=تعداد یالها)

اگر تعداد راسها بیش از یک باشد ،حداقل دو راس از درجه 1 دارد.

تعداد مسیرهای متفاوت بطول 1 در یک درخت از مرتبه P برابر است با: $\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}$



نمونه های درخت.

تعداد مسیرهای متفاوت بطول 1 در یک درخت از مرتبه P برابر است با:

مثال: گراف همبند G فاقد دور است ،مجموع مرتبه و اندازه آن کدام عدد میتواند باشد.

12 15 18 20

p+q=(q+1)+q=2q+1 .مجموع عددی فرد است

مثال: بین هر دوراس از گراف G دقیقا یک مسیر وجود دارد.اگر این گراف شامل 7 راس از درجه یک و 5 راس از درجه 2 و K راس از درجه 3 باشد ،k را پیدا کنید؟

$\sum_{i=1}^{P} di=2q \longrightarrow 7*1+5*2+k*3=2q=2(p-1) \longrightarrow 17+3k=2(7+5+k)-2 \longrightarrow 17+3k=22+2k \longrightarrow K=5$

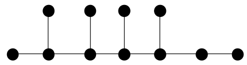
q=p-1 .رابطه درخت P=7+5+k

مثال: دنباله نزولی S:3,3,3,3,2,1,…,1 دنباله درجه راسهای یک درخت است.الف)تعداد رئوس درجه 1 را پیدا کنید.ب)نمودار درخت را رسم کنید؟

x = تعداد راسها از درجه 1

P=5+x
q=p-1

$\sum_{i=1}^{P} di=2q=4*3+2+x \longrightarrow 14+x=2p-2 \longrightarrow 14+x=2(5+x)-2 \longrightarrow X=6$



مثال: درختی 2 راس از درجه 5 و 3 راس از درجه 3 دارد و راس از درجه 4 ندارد و ماکزیمم درجه رئوس آن 5 است ،اگر مرتبه این درخت 25 باشد چند راس از درجه 2 و چند راس از درجه 1 دارد؟.

$\sum_{i=1}^{P} di=2q=2*24=48$

$p=q+1 \begin{cases} p=25 \\ q=24 \end{cases}$

x = تعداد راسها از درجه 2

y = تعداد راسها از درجه 1

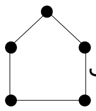
$2*5+3*3+0*4+x*2+y*1=48 \longrightarrow 2x+y=29$

$25=p=x+y+3+2 \longrightarrow x+y=20$

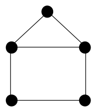
$\longrightarrow x=9,\ y=11$

گراف اویلری: گراف G اویلری است هر گاه بتوان از هر راس آن شروع کرده و از همه یالهای G فقط یکبار عبور کرده و به همان راس اولیه بازگشت.

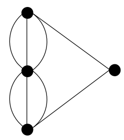
قضیه: گرافی اویلری است اگر و تنها اگر درجه همه رئوس آن زوج باشد.



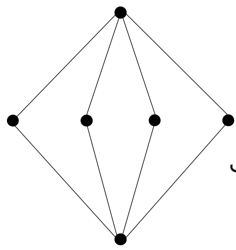
گراف اویلر است
گراف همیلتون است



گراف اویلر نیست
گراف همیلتون است



گراف اویلر نیست
نمیتوان از کلیه رئوس عبور کرد و به نقطه اول بازگشت



گراف اویلر است
گراف همیلتون نیست